

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов

ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

Конспект лекцій з прикладної механіки
для студентів немашинобудівних спеціальностей

ЧАСТИНА II

Харків 2016

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«ХАРКІВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов

ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ

Конспект лекцій з прикладної механіки
для студентів немашинобудівних спеціальностей

ЧАСТИНА II

Затверджено
редакційно-видавничою
радою університету,
протокол №
від

Харків
НТУ «ХПІ»
2016

УДК 621.01
ББК 34.41
М75

Рецензенти: *В.Ф. Далека*, д-р техн. наук, проф., ХНУГХ;
В.Л. Хавін, канд. техн. наук, проф., НТУ «ХП».

Музикін Ю.Д.

М75 Основи розрахунків на міцність : конспект лекцій з прикладної механіки для студентів немашинобудівних спеціальностей. Ч. II / Ю.Д. Музикін, В.В. Клітної, О.І. Наумов. – Х .: НТУ «ХП», 2016. – 75 с.

Текст лекцій містить основні розділи теоретичної частини курсу «Прикладна механіка», які представлені в стислій конспективній формі. В другій частині висвітлюються питання з таких розділів: прості та складні види деформації, основи теорії складно-напруженого стану, втомна міцність. У кожному розділі наведені приклади задач та методики їх розв’язання, побудовані на базі розглянутого теоретичного матеріалу.

Призначено для студентів немашинобудівних спеціальностей.

Іл.: 59

УДК 621.01

ББК 34.41

© НТУ «ХП», 2016

© Музикін Ю.Д., Клітної В.В., Наумов О.І., 2016

Лекція 5. Основи розрахунків на міцність. Внутрішні сили і зусилля, напруження, переміщення і деформації.

- 1. Завдання, мета і предмет науки опір матеріалів.*
- 2. Розрахункова схема. Типові форми елементів інженерних споруд.*
- 3. Класифікація сил, що вивчаються в опорі матеріалів.*
- 4. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів.*
- 5. Метод перетинів. Внутрішні силові чинники.*
- 6. Напруження. Переміщення і деформації.*

5.1. Завдання, мета і предмет науки опір матеріалів.

Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин (деталей) і споруд.

На відміну від теоретичної механіки, де всі тіла розглядаються абсолютно жорсткими і такими, що не деформуються, в опорі матеріалів розглядаються реальні тіла, тобто такі, які змінюють свою геометрію і розміри (деформуються).

Деформація яка повністю зникає після зняття навантажень – пружна деформація.

Деформація, яка повністю або частково залишається після зняття зовнішнього навантаження – залишкова або пластична деформація.

У опорі матеріалів поява пластичної деформації неприпустима і вважається початком руйнування (розглядаються тільки пружні деформації).

В процесі експлуатації машин і споруд їх елементи беруть участь в роботі конструкції і піддаються дії різних сил – навантажень. Для забезпечення нормальної роботи, конструкція повинна задовольняти необхідним умовам міцності, жорсткості і стійкості.

Міцність – здатність конструкції, її частин і деталей під дією зовнішніх сил не руйнуватися і не одержувати залишкових деформацій.

Жорсткість – здатність конструкції і її елементів під дією зовнішніх сил одержувати пружну деформацію, що не перевищує значень, що допускаються.

Стійкість – здатність конструкції або її елементів під дією зовнішніх сил не змінювати свою первинну геометричну форму.

Щоб конструкція в цілому відповідала вимогам міцності, жорсткості і стійкості, а, отже, була надійною в експлуатації, необхідно задати її елементам найбільш раціональну форму і, знаючи властивості матеріалів, з яких вони виготовлятимуться, визначити відповідні геометричні розміри залежно від величини і характеру діючих сил.

Опір матеріалів вирішує вказані задачі, базуючись як на теоретичних, так і на експериментальних даних, що мають в цій науці однаково важливе значення. У теоретичній частині ця наука базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній – на фізиці і матеріалознавстві.

5.2. Розрахункова схема. Типові форми елементів інженерних споруд.

Розрахункова схема є спрощеним представленням реальної деталі, в якій свідомо не враховується ряд неістотних з погляду розрахунку, що проводиться, чинників.

Необхідність схематизації пояснюється тим, що розрахунок навіть простих деталей з урахуванням всіх конструктивних чинників практично стає громіздким і надто складним.

При виборі розрахункової схеми в геометрію тіл вносяться спрощення, в результаті всі тіла зводяться до 4-х форм: брус, пластина, оболонка, об'ємне тіло.

Брус – тіло, у якого один розмір (довжина), значно перевищує два інші (поперечних) розміри (рис. 5.1). Брус з прямою віссю називається стрижнем.

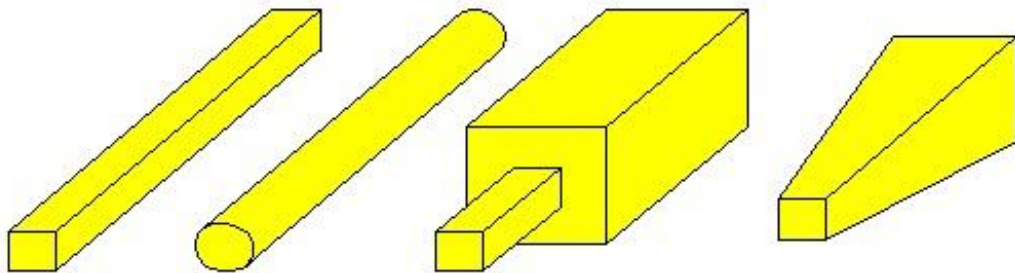


Рисунок 5.1 - Бруси

У машинах і спорудах зустрічаються стрижні як прямолінійні, так і криволінійні, як призматичні так і змінного перетину. Стрижні, у яких товщина стінки значно менше габаритних розмірів поперечного перетину називаються тонкостінними.

Пластина і Оболонка – тіла, товщина яких істотно менше за решту його розмірів (рис. 5.2).

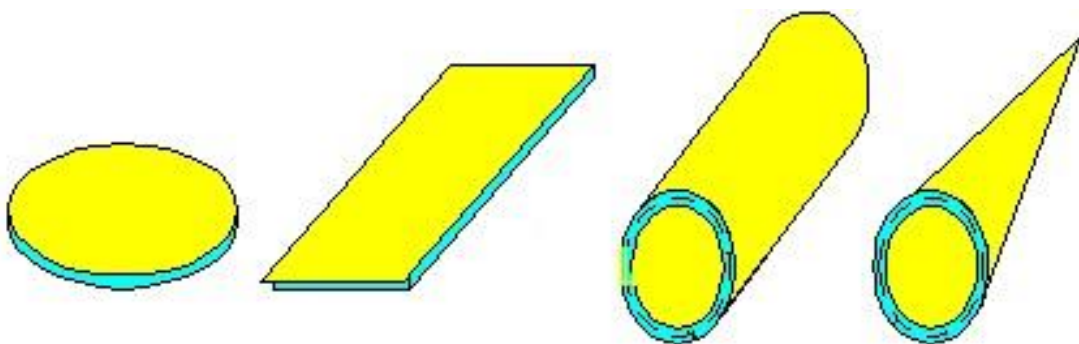


Рисунок 5.2 – Пластини і оболонки

Поверхня, яка ділить товщину пластини і оболонки на рівні частини, називається серединною. Якщо серединна поверхня є площиною, то тоді розрахунковий об'єкт називається пластиною. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки: циліндрові, конічні, сферичні та ін.

Об'єкти, у яких всі три розміри одного порядку називають об'ємними тілами.

5.3. Класифікація сил які вивчаються в опорі матеріалів.

1. Зовнішні і внутрішні.

Зовнішні – сили взаємодії тіл одного з одним.

Внутрішні – сили, що виникають в самому тілі під дією зовнішніх сил, які прагнуть повернути тіло в недеформований стан.

2. Зосереджені і розподілені.

Зосереджені – сили, які діють на тіло по невеликій частині поверхні, що умовно приймається у вигляді геометричної точки (сили які абстрактно вводяться для спрощення розрахунків); ці сили вимірюються в H , κH , аналогічно вводиться поняття зосередженої пари або моменту (Hm , κHm) (рис. 5.3).

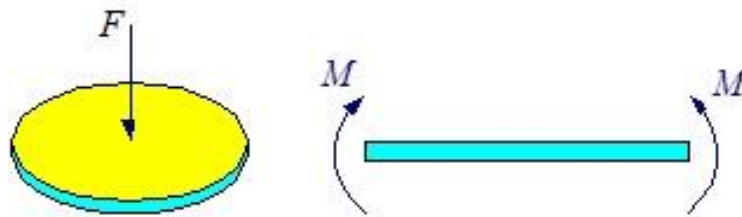


Рисунок 5.3 – Зосереджена сила і момент

Розподілені – сили, які діють по лінії (H/m), поверхні (H/m^2), або за об'ємом (H/m^3 , сила ваги, інерції) (рис. 5.4).

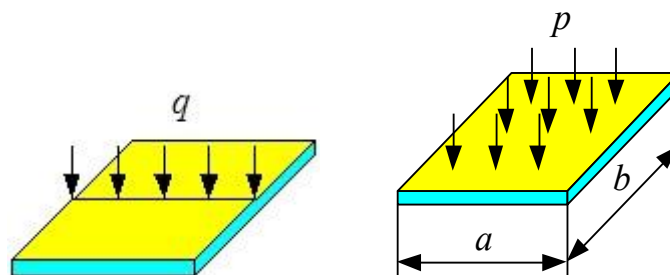


Рисунок 5.4 – Розподілені сили

3. Активні і реактивні сили.

Активні – зовнішні сили, що діють на тіло.

Реактивні – сили, що виникають в зв'язках, які утримують тіло (реакції зв'язків).

4. Статичні і динамічні.

Статичні – сили, які протягом кінцевого часу зростають від нуля до свого номінального значення, і зберігають свою величину і напрям тривалий час (рис. 5.5, а).

Динамічні – сили, які супроводжуються значними прискореннями, як деформованого тіла, так і взаємодіючих з ним тіл, при цьому виникають сили інерції, якими не можна нехтувати; динамічні навантаження діляться на миттєво прикладені (рис. 5.5, б), ударні (рис. 5.5, в) і повторно-змінні (рис. 5.5, г).

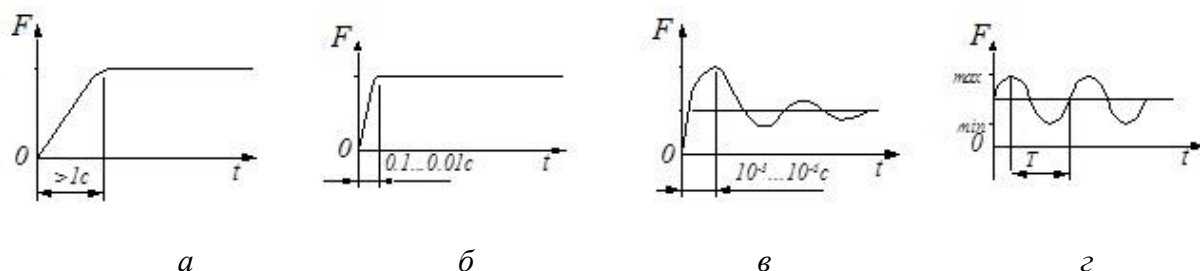


Рисунок 5.5 – Характер навантаження

5.4. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів

Для спрощення розрахунків без втрати їх точності в опорі матеріалів приймаються наступні гіпотези:

1. Гіпотеза плоских перетинів.

Будь який плоский перетин узятий до деформації залишається плоским і після деформації. Гіпотеза підтверджується експериментально для перетинів віддалених від місця прикладення сили.

2. Гіпотеза малих деформацій.

Пружні деформації, які отримує тіло, малі в порівнянні з лінійними розмірами самого тіла (точки прикладення сил до і після деформації не змінюються).

3. Гіпотеза однорідності і нерозривності.

Весь об'єм тіла заповнений даним матеріалом і властивості цього матеріалу однакові в усіх точках і по всіх напрямках; такі матеріали називаються ізотропними (сталі, мідь). Якщо властивості матеріалу змінюються залежно від напрямку, або точки розгляду, то матеріал – анізотропний (деревина, пластмаса, чавун).

4. Гіпотеза незалежності дії сил.

Якщо на тіло діють декілька сил, то повна деформація тіла може бути представлена як сума деформацій одержаних тілом окремо від кожної сили (принцип суперпозиції).

Перераховані вище гіпотези і принципи, і так само деякі інші допущення, про які буде сказано далі, дозволяють вирішувати широкий круг задач на міцність, жорсткість і стійкість. Результати розрахунків добре узгоджуються з даними експериментів.

5.5. Метод перетинів. Внутрішні силові чинники.

На тіло діє система зовнішніх сил ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) необхідно визначити внутрішні сили, що виникають в заданому перетині I (рис. 5.6, а). Для визначення внутрішніх сил в елементі конструкції застосовують метод перетинів. Для цього подумки розрізаємо тіло в перетині, одну частину тіла відкидаємо, а частину тіла, що залишилася, розглядаємо в стані рівноваги під дією всіх внутрішніх і зовнішніх сил (рис. 5.6, б).

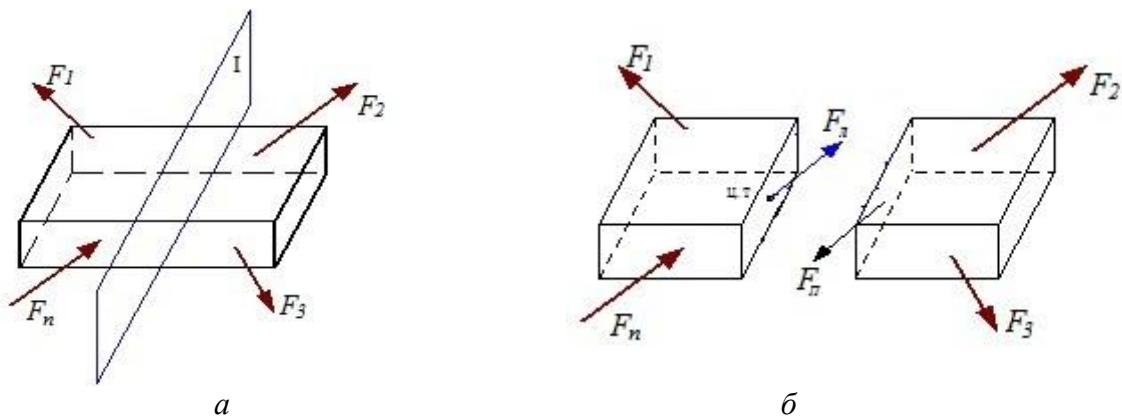


Рисунок 5.6 – Метод перетинів

Внутрішні сили які діють на ліву частину тіла F_L рівні по величині але протилежні за напрямом внутрішнім силам які діють на праву частину тіла F_{II} (вони повинні бути такими, щоб виконувалася умова безперервності деформацій – права і ліва частини плавно сполучалися).

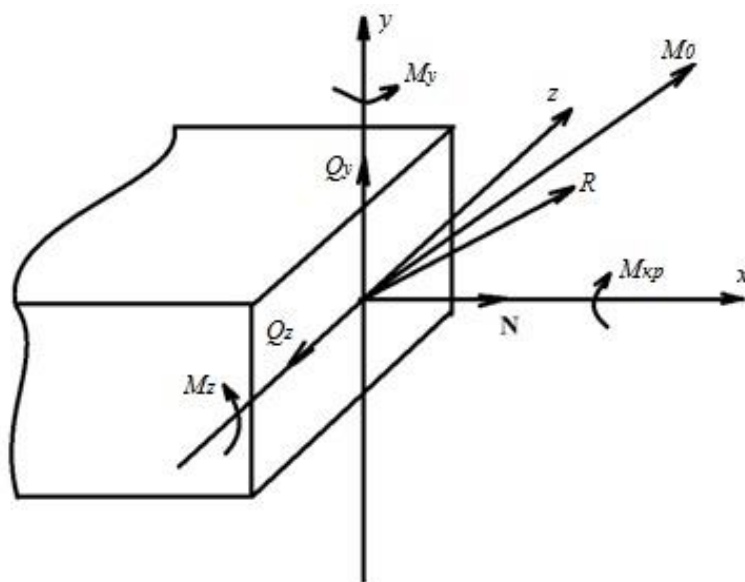


Рисунок 5.7 – Головний вектор сил \vec{R} і головний момент \vec{M}_0

Приводячи внутрішні сили до центру тяжіння перетину, одержуємо головний вектор сил \vec{R} і головний момент \vec{M}_0 . Якщо в центрі тяжіння перетину розташувати почало системи координат x, y, z (вісь z – перпендикулярна перетину; x, y – лежать в площині перетину), то вектори \vec{R} і \vec{M}_0 можна розкласти кожен на три складові (проекції): 3-и сили N, Q_y, Q_z і 3-и моменти $M_y, M_z, M_{кр}$ (рис. 5.7).

- N – подовжня сила;
- Q_y, Q_z – поперечні сили;
- M_y, M_z – згинальні моменти;
- $M_{кр}$ – крутильний момент.

Під дією показаних на рисунку 5.7 сил ліва частина елемента знаходиться в рівновазі, тобто для неї повинні виконуватися шість рівнянь рівноваги:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \\ \sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Таким чином, ми одержуємо 6-ть невідомих і 6-ть рівнянь статки, з яких можуть бути знайдені невідомі внутрішні силові чинники.

Залежно від того, які внутрішні силові чинники виникають в перетині, розрізняють наступні види деформації:

- розтяг-стиск ($N \neq 0$, інші дорівнюють нулю);
- кручення ($M_{кр} \neq 0$, інші дорівнюють нулю);
- чистий згин ($M_x \neq 0$, $M_y \neq 0$, $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \neq 0$, інші дорівнюють нулю);
- чистий зсув ($Q_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \neq 0$, інші дорівнюють нулю);
- поперечний згин ($Q_x \neq 0$, $Q_y \neq 0$, $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} \neq 0$, інші дорівнюють нулю).

Дані види деформацій називаються простими.

5.6. Напруження. Переміщення і деформації.

Напруження характеризують інтенсивність навантаження і визначаються відношенням внутрішніх сил пружності до площі на яку вони діють (рис. 5.8):

$$\vec{p}_{cp} = \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} \text{ — середнє значення напруження;}$$

$$\vec{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta A} = \frac{d\vec{R}}{dA} \text{ — дійсне значення напруження в точці.}$$

Якщо внутрішні сили рівномірно розподілені по перетину, то:

$$p = \frac{\vec{R}}{A}. \quad (5.2)$$

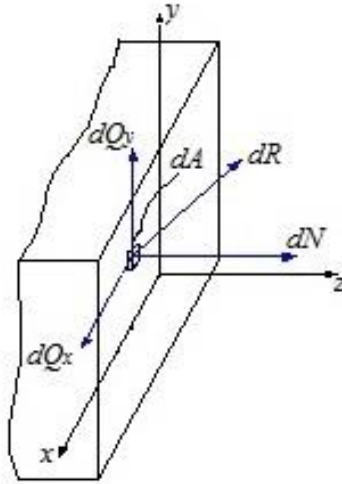


Рисунок 5.8 – Проекції головного вектора сил на осі

У загальному випадку вектор напруження направлений під деяким кутом до перетину. Якщо вісь z – перпендикулярна перетину; x, y – лежать в площині перетину. Тоді проекція напруження \bar{p} на вісь z називається нормальним напруженням σ , а проекції на осі x і y – дотичними напруженнями τ_x, τ_y . Їх вимірюють в одиницях напруження – Паскалях (Па) і кратних йому (кПа, МПа).

З урахуванням проекцій головного вектора сил \vec{R} на осі (рис. 5.8), одержимо:

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dA}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}. \quad (5.3)$$

Повне дотичне напруження:

$$\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (5.4)$$

Повне напруження в точці:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_x^2 + \tau_y^2}. \quad (5.5)$$

Поняття напруження грає дуже важливу роль в розрахунках на міцність. Тому значна частина курсу опору матеріалів відводиться вивченню способів обчислення напружень σ и τ .

Під дією зовнішніх сил $N \neq 0$ ($\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$) точки одержують переміщення Δl (рис.5.9).

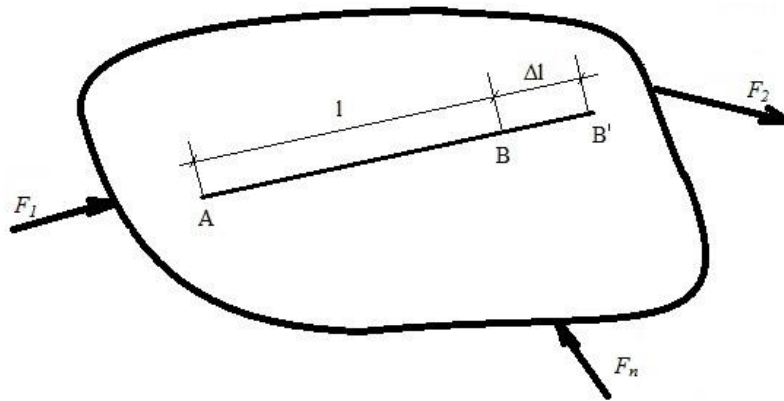


Рисунок 5.9 – Переміщення

Деформацією називається відносне переміщення:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta l}{l} \text{ (середня деформація відрізка } l\text{);}$$

$$\varepsilon = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l} \text{ (дійсне значення деформації).}$$

У загальному випадку деформація може розглядатися в проекціях на координатні осі: ε_x , ε_y , ε_z .

Повна деформація:

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}. \quad (5.6)$$

Контрольні запитання

1. Завдання і мета науки опір матеріалів.
2. Що таке розрахункова схема деталі? Типові форми елементів конструкцій.
3. Класифікація зовнішніх сил.
4. Основні гіпотези опору матеріалів.
5. Суть методу перетинів. Внутрішні зусилля.
6. Напруження і їх класифікація.
7. Деформації і їх класифікація.

Лекція 6. Розтяг-стиск.

- 6.1. Розтяг-стиск. Внутрішні сили і напруження.
- 6.2. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона.
- 6.3. Приклад побудови епюр подовжніх сил, напружень і переміщень.
- 6.4. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу.
- 6.5. Напруження, які виникають на перерізах, розташованих під кутом, при деформаціях розтягу.
- 6.6. Запас міцності. Допустні напруження. Умова міцності і жорсткості при деформаціях розтягу-стиску.

6.1. Розтяг-стиск. Внутрішні сили і напруження.

Розтяг-стиск – це такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових чинників в кожному поперечному перетині тіла виникає тільки один внутрішній силовий чинник – подовжня сила пружності N . Решта силових чинників відсутня.

На стержень діє сила F необхідно визначити внутрішні силові чинники що діють в перетині I-I (рис. 6.1).

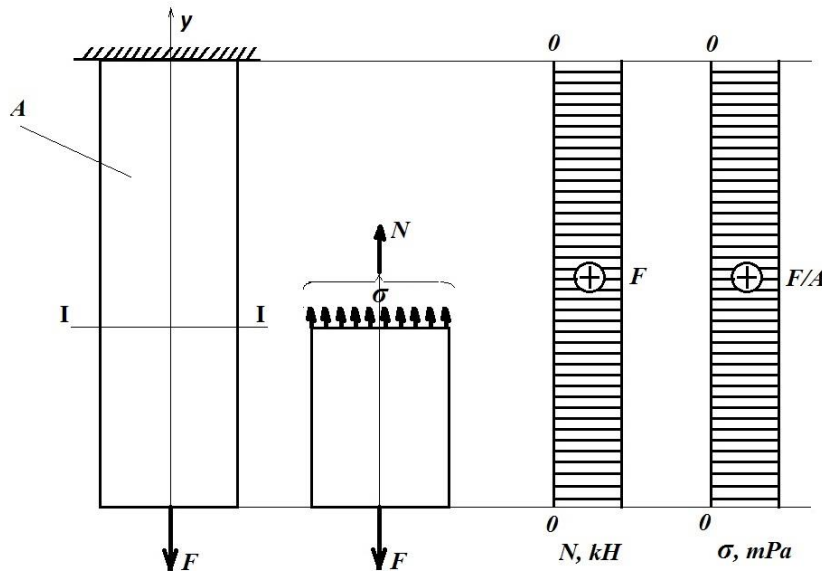


Рисунок 6.1 – Епюри подовжніх сил і напружень

Для цього скористаємося методом перетинів, тобто подумки розрізатимемо стержень в перетині I-I, верхню частину стержня відкинемо, а нижню розглянемо в стані рівноваги під дією всіх зовнішніх і внутрішніх сил.

У кожній точці перетину виникне внутрішнє зусилля σ , рівнодіючою якого буде сила N .

Оскільки внутрішні зусилля в перетинах, віддалених від місць прикладення зосереджених зусиль, розподілені рівномірно по перетину, то

$$N = \int_A \sigma dA; \quad \sigma \rightarrow const; \quad N = \sigma \int_A dA = \sigma A. \quad (6.1)$$

$\sigma = \frac{N}{A}$ – за визначенням напруження в перетині.

$$\text{З умови рівноваги нижньої частини } \sum F_y = 0 \quad N = F \quad \text{і} \quad \sigma = \frac{F}{A}.$$

Зобразимо графічно зміни сили N і напруження σ уздовж осі стержня (рис. 6.1). Таке графічне зображення називається епюрою. Кожна лінія на епюрі в масштабі побудови відповідає внутрішньому силовому чиннику в даному перетині. 0–0– базова лінія епюри.

Якщо сила N направлена від перетину вона викликає деформацію розтягу зі знаком «+», якщо направлена до перетину – деформація стиску, приймається зі знаком «-».

6.2. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона.

До стержня завдовжки l і діаметром b прикладена сила F , під дією якої стержень подовжується на величину $\Delta l = l_1 - l$ і звужується на величину $\Delta b = b - b_1$ (рис. 6.2).

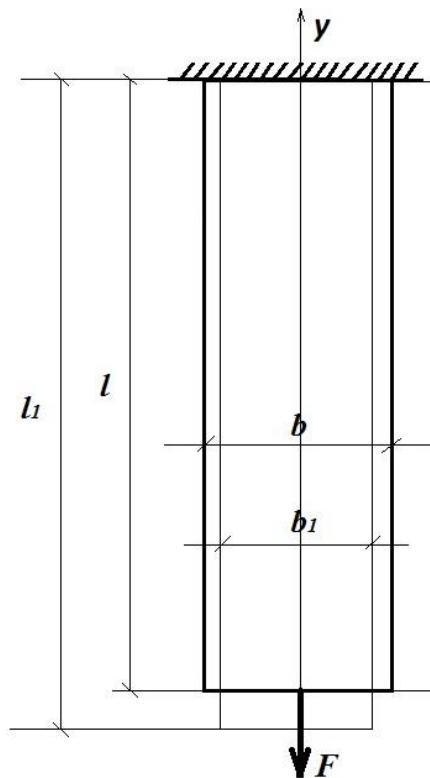


Рисунок 6.2 – Розтяг стержня

Відношення подовження до первинної довжини стержня називається подовжньою деформацією $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

З дослідів встановлено, що між подовжньою деформацією і нормальними напруженням існує прямо пропорційна залежність:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.2)$$

Приведена залежність називається законом Гука (по прізвищу англійського ученого, що вперше встановив її в 1660 р.). Закон може бути сформульований таким чином: подовжня деформація прямо пропорційна відповідній нормальній напрузі. Величина E , яка входить у формулу, що виражає закон Гука, є однією з найважливіших фізичних констант матеріалу. Вона характеризує його жорсткість, тобто здатність чинити опір пружній деформації. Ця величина називається модулем подовжньої пружності. Величина вимірюється в тих же одиницях, що і напруження, тобто в Н/м^2 (Па), Н/мм^2 (МПа). Значення модулів пружності для деяких матеріалів представлені в табл. 6.1.

Таблиця 6.1.

Матеріал	E [МПа]
Сталь	$2 \dots 2,1 \cdot 10^5$
Чавун	$0,75 \dots 1,6 \cdot 10^5$
Мідь	$1,2 \cdot 10^5$
Алюміній	$0,8 \cdot 10^5$

Підставивши у формулу (6.2) значення нормального напруження $\sigma = \frac{N}{A}$ і подовжньої деформації $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, можемо визначити зміну довжини стержня:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (6.3)$$

Одержаний вираз називають законом Гука в компонентах переміщень. Він показує, що подовження (укорочення) при розтягу (стиску) залежить від величини подовжньої сили N , площі поперечного перетину A стержня, його довжини l і модуля подовжньої пружності E . Добуток EA називається жорсткістю перетину стержня при розтягу (стиску).

По аналогії з подовжньою деформацією $\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}$ – називається поперечною деформацією. Досліди показують, що відношення поперечної деформації ε' до подовжньої ε не залежить від N і визначається тільки властивостями матеріалу. Абсолютна величина

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|, \quad (6.4)$$

називається коефіцієнтом Пуассона.

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина, що характеризує здатність матеріалу деформуватися в поперечному напрямі при розтягу або стиску його в подовжньому напрямі (для пробки $\mu = 0$; для гуми $\mu = 0,48$; для сталей $\mu = 0,25 - 0,3$). Значення коефіцієнта Пуассона для різних матеріалів визначається експериментальним шляхом при випробуваннях зразків і лежить в межах $0 \leq \mu \leq 0,5$.

6.3. Приклад побудови епюр подовжніх сил, напружень і переміщень.

Розглянемо стержень представлений на рисунку 6.3. A і $2 \cdot A$ – площі відповідних перетинів стержня.

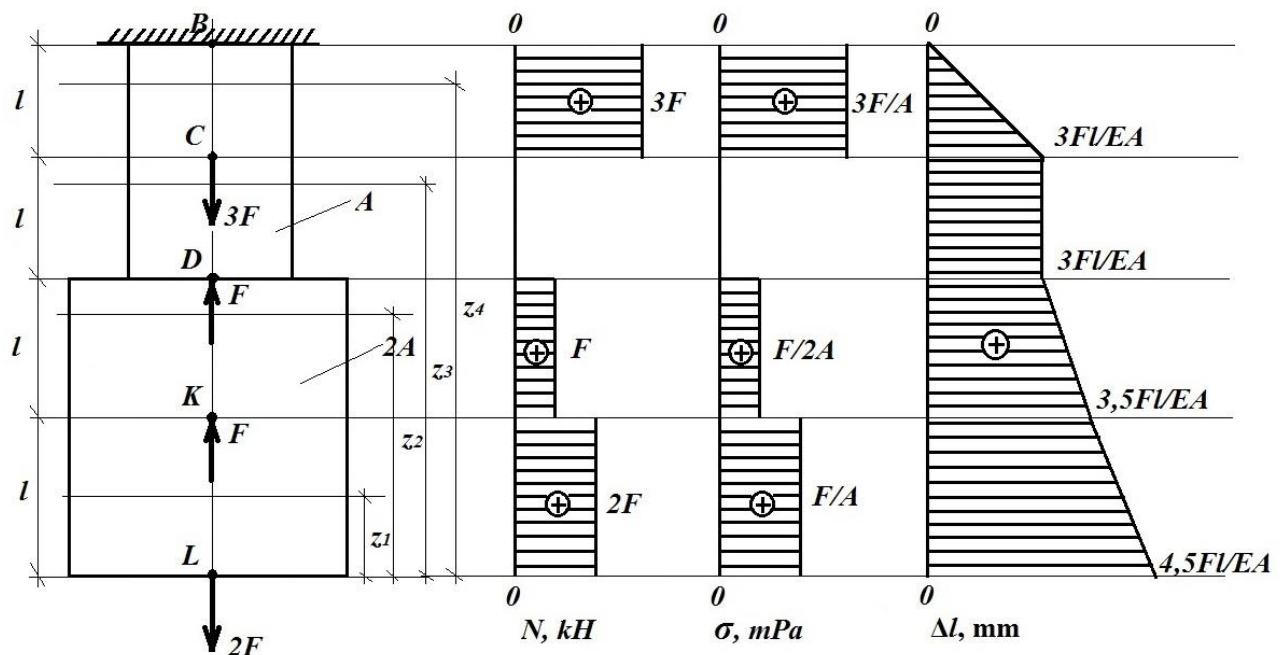


Рисунок 6.3 – Приклад побудови епюр

Для ділянок стержня на яких функції внутрішніх зусиль незмінні запишемо вирази для подовжніх зусиль і нормальних напружень:

$$0 \leq z_1 \leq l$$

$$N_1 = 2 \cdot F;$$

$$\sigma_1 = \frac{2 \cdot F}{2 \cdot A} = \frac{F}{A};$$

$$l \leq z_2 \leq 2 \cdot l$$

$$N_2 = 2 \cdot F - F = F;$$

$$\sigma_2 = \frac{F}{2 \cdot A};$$

$$2 \cdot l \leq z_3 \leq 3 \cdot l$$

$$N_3 = 2 \cdot F - F - F = 0;$$

$$\sigma_3 = \frac{0}{A} = 0;$$

$$3 \cdot l \leq z_4 \leq 4 \cdot l$$

$$N_4 = 2 \cdot F - F - F + 3 \cdot F = 3 \cdot F;$$

$$\sigma_4 = \frac{3 \cdot F}{A}.$$

За допомогою одержаних функцій будуюмо епюри внутрішніх силових чинників і напружень (рис. 6.3).

Визначимо переміщення у вибраних точках і побудуємо епюру переміщень. Для цього скористаємося законом Гука в компонентах переміщень (6.3).

$$\Delta l_B = 0;$$

$$\Delta l_C = \Delta l_B + \Delta l_{BC} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_D = \Delta l_C + \Delta l_{CD} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + 0;$$

$$\Delta l_K = \Delta l_D + \Delta l_{DK} = \frac{3 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{F \cdot l}{E \cdot 2 \cdot A} = \frac{3,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A};$$

$$\Delta l_L = \Delta l_K + \Delta l_{KL} = \frac{3,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A} + \frac{2 \cdot F \cdot l}{E \cdot 2 \cdot A} = \frac{4,5 \cdot F \cdot l}{E \cdot A},$$

де E – модуль подовжньої пружності матеріалу стержня.

6.4. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу.

В процесі роботи багато деталей випробовують сумісну дію силового і температурного впливу. У такому разі зміну довжини стержня можна представити в наступному вигляді:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} + l\alpha\Delta T, \quad (6.5)$$

α – коефіцієнт лінійного температурного розширення; ΔT – зміна температури. 1-й доданок – переміщення під дією зовнішніх сил; 2-й доданок – переміщення під дією температури.

Після перетворення

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} + \alpha\Delta T \quad \rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta T. \quad (6.6)$$

одержимо вираз для деформації при силівій і температурній дії.

Для металів дана залежність виконується в межах температур 300-400 С°, оскільки при вищих температурах модуль пружності E і коефіцієнт температурного розширення α залежать від температури.

6.5. Напруження, які виникають на перерізах, розташованих під кутом, при деформаціях розтягу.

Розглянемо довільний переріз розташований під кутом $n - m$. Положення цього перетину визначається кутом α . σ – нормальні напруження, що виникають на перерізах перпендикулярних осі. P – напруження що виникають на перерізах розташованих під кутом (рис. 6.4). A – площа перетину перпендикулярного перерізу, A_α – площа перетину перерізу розташованого під кутом. Залежність між величинами площ перетинів – $A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$.

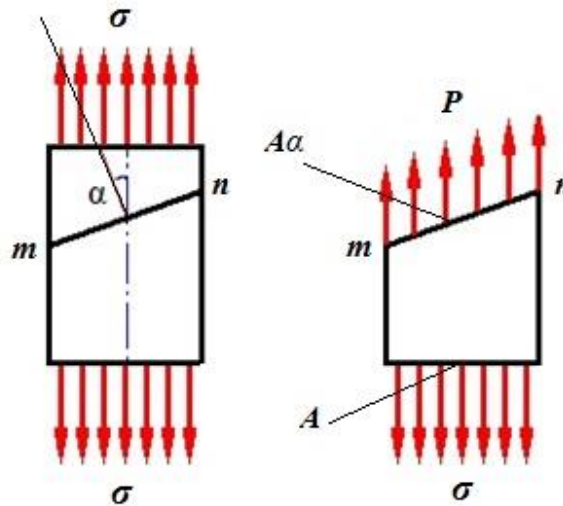


Рисунок 6.4 – Напруження на перерізах розташованих під кутом

Використовуючи метод перетинів розглянемо рівновагу нижньої частини стержня, для чого приведемо рівняння статичної рівноваги і виведемо залежність між напруженнями σ і P .

$$\sum F_y = 0 \rightarrow \sigma A = P A_\alpha \rightarrow P = \sigma \cos \alpha. \quad (6.7)$$

Розкладемо напруження P на 2-і взаємоперпендикулярні осі і одержимо дві складові напруження σ_α і τ_α (рис. 6.5).

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= P \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \\ \tau_\alpha &= P \cdot \sin \alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.8)$$

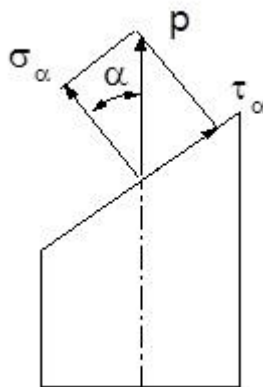


Рисунок 6.5 – Складові повного напруження

Дослідимо отримані вирази (6.8) в залежності від величини кута нахилу перерізу α .

$$\begin{aligned}
\alpha = 0^\circ & \quad \sigma_\alpha = \sigma & \tau_\alpha = 0; \\
\alpha = \pm 45^\circ & \quad \sigma_\alpha = \frac{\sigma}{2} & \tau_\alpha = \pm \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}; \\
\alpha = 90^\circ & \quad \sigma_\alpha = 0 & \tau_\alpha = 0.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

У подовжніх волокнах ($\alpha = 90^\circ$) нормальні і дотичні напруження відсутні, в поперечних волокнах ($\alpha = 0^\circ$) нормальні напруження – максимальні; дотичні рівні нулю. При вуглі повороту $\alpha = \pm 45^\circ$ дотичні напруження досягають свого максимуму.

Визначимо напруження, які виникають на перерізах розташованих під кутом $90^\circ + \alpha$:

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma \cdot \cos^2(\alpha + 90) = \sigma \cdot \sin^2 \alpha; \tag{6.10}$$

$$\tau_{\alpha+90} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2(\alpha + 90) = -\frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha. \tag{6.11}$$

З виразу (6.11) виходить закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на 2-х взаємо перпендикулярних і нескінченно малих перерізах рівні за величиною і протилежні за знаком (напрямком) (рис. 6.6).

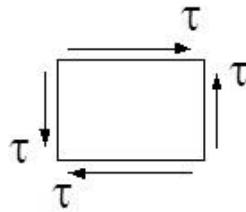


Рисунок 6.6 – Ілюстрація закону парності дотичних напружень

6.6. Запас міцності. Допустні напруження. Умова міцності і жорсткості при деформаціях розтягу-стиску.

Проектування починається з вибору матеріалу, при виборі якого враховуються умови роботи проектованої конструкції. Крім того, можуть братися до уваги економічні міркування і технологія виготовлення. Механічні випробування матеріалу дають граничні значення напружень, досягнення яких в частинах машин спричиняє за собою або руйнування, або появу неприпустимих деформацій.

Основним завданням розрахунку конструкції є забезпечення її безпечної експлуатації. Для безпечної роботи напруження в конструкції повинні бути нижче за граничні напруження (повинна виконуватися умова міцності). Тому другим питанням проектування є вибір безпечного, або допустного напруження – $[\sigma]$.

Допустним напруженням, називається найбільше напруження, при якому забезпечується міцність і довговічність проектованого елементу конструкції.

Допустні напруження, складають деяку частку від граничних – σ_{lim} . Для статичного навантаження значення допустних напружень:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{n} \quad (6.12)$$

В залежності від виду навантаження і матеріалу при виборі допустного напруження використовується те або інше граничне напруження ($\sigma_{\text{lim}} = \sigma_T$ (межа текучості) для пластичних матеріалів; $\sigma_{\text{lim}} = \sigma_B$ (межа міцності) для крихких матеріалів).

Число n , що показує в скільки разів допустне напруження, менше граничного, називається запасом міцності. Запас міцності повинен бути вибраний так, щоб покрити неточність визначення навантажень і напружень. Крім того n вибирається тим більшим, чим довговічніше і відповідальніше має бути конструкція.

Встановлення допустного напруження, є дуже важливим питанням. Якщо воно вибране дуже великим, то конструкція буде неміцною, і, навпаки, при заниженому $[\sigma]$ розміри конструкцій будуть надмірно великими, що приведе до великої ваги конструкції і її удорожчання.

Для деяких областей машинобудування існують норми для допустних напружень, проте дати загальні норми, придатні для всіх випадків, не можна.

Для конструкцій, що працюють на розтяг-стиск, умову міцності для небезпечного перетину, можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_{\text{max}} = \left[\frac{N}{A} \right]_{\text{max}} \leq [\sigma]. \quad (6.13)$$

Це рівняння дозволяє вирішувати наступні задачі:

1. По заданому зовнішньому навантаженню і допустним напруженням $[\sigma]$ визначити необхідну площу перетину $A \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]}$;
2. За заданою площею перетину і допустним напруженням $[\sigma]$ визначити навантаження які допускаються;
3. По заданому зовнішньому навантаженню і площі поперечного перетину здійснити перевірку на міцність.

В деяких випадках працездатність елементу конструкції визначається не тільки його міцністю, але і жорсткістю, тобто здатністю елементу сприймати навантаження без неприпустимих пружних деформацій. При розрахунках на жорсткість визначають максимальні переміщення перетинів і зіставляють їх з переміщеннями, що допускаються. Умова жорсткості, що обмежує зміну довжини елементу, має наступний загальний вигляд:

$$\Delta l \leq [\Delta l], \quad (6.14)$$

де Δl - зміна розмірів деталі; $[\Delta l]$ - величина цієї зміни, що допускається.

Враховуючи, що при розтягу (стиску) абсолютне подовження в загальному вигляді визначається як алгебраїчна сума величин по ділянках, то умову жорсткості можна записати в наступному вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i} \leq [\Delta l]. \quad (6.15)$$

Контрольні запитання

1. Деформація розтяг-стиск.
2. Внутрішні силові чинники і напруження при розтягу-стиску.
3. Закон Гука. Коефіцієнт Пуассона.
4. Закон Гука в компонентах переміщень.
5. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу.
6. Напруження на перерізах розташованих під кутом, при деформаціях розтягу.
7. Закон парності дотичних напружень.
8. Запас міцності, допустимі напруження.
9. Умова міцності і жорсткості при деформаціях розтяг-стиск.

Лекція 7. Геометричні характеристики плоских перетинів

- 7.1. Статичний момент перетину. Центр тяжіння.
- 7.2. Зміна статичного моменту перетину при паралельному перенесенні осей.
- 7.3. Визначення центра тяжіння складної фігури.
- 7.4. Моменти інерції плоских перетинів.
- 7.5. Зміна моментів інерції перетину при паралельному перенесенні осей.
- 7.6. Головні осі. Головні моменти інерції.
- 7.7. Головні моменти інерції простих фігур.
- 7.8. Головні моменти інерції складних фігур з віссю симетрії.
- 7.9. Поняття про радіус інерції і момент опору.

Для перевірки умови міцності необхідно знати величину напружень в поперечних перетинах, яка залежить як від величини внутрішніх зусиль, так і від площі поперечного перетину елемента. Проте як видно з прикладу (рис. 7.1), при однакових параметрах розрахункових моделей балок (довжина l , площа перетину $b \cdot h$, зовнішнє навантаження F) прогин f у другому випадку більше $f_2 > f_1$. Це викликано різною орієнтацією перетинів по відношенню до напрямку сили F . Таким чином, при розрахунках конструкцій на механічну міцність необхідно враховувати не тільки площу перетину але і інші його геометричні характеристики, такі як статичні моменти, моменти інерції, моменти опору

площі перетинів, радіуси інерції. Ці характеристики мають фізичний сенс, але не можуть бути визначені експериментально.

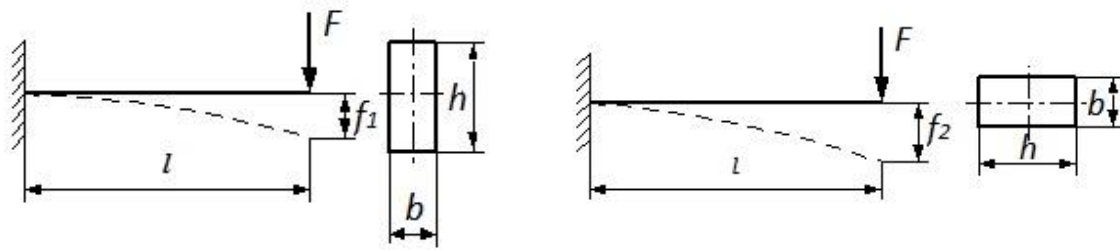


Рисунок 7.1 – прогин балки

7.1. Статичний момент перетину. Центр тяжіння.

Розглянемо довільний поперечний перетин бруса, пов'язаний з координатними осями X і Y (рис. 7.2). Виділимо елемент площі dA з координатами x і y .

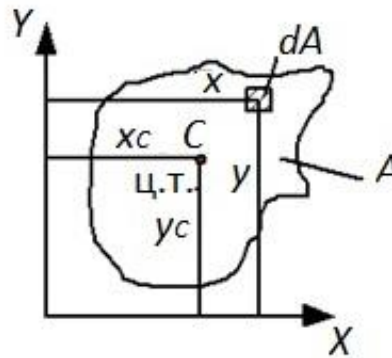


Рисунок 7.2 – Плоский перетин

За визначенням, статичний момент – сума творів елементарних перетинів на координату їх відстані до відповідної осі.

$$S_x = \int_A y dA \quad (7.1)$$

$$S_y = \int_A x dA \quad (7.2)$$

S_x , S_y – статичні моменти плоскої фігури щодо осей X і Y відповідно. Розмірність статичних моментів – мм^3 , см^3 , м^3 . Статичний момент може бути позитивним, негативним, або рівним нулю.

З теоретичної механіки відомо, що координати центру тяжіння плоского перетину можуть бути визначені в наступному вигляді:

$$x_c = \frac{1}{A} \int_A x dA = \frac{1}{A} S_y, \quad y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} S_x. \quad (7.3)$$

Звідси статичні моменти фігури можуть бути знайдені, якщо відома площа фігури і координати центру тяжіння.

$$S_y = x_c A; \quad S_x = y_c A. \quad (7.4)$$

З виразу (7.4) виходить, що статичні моменти площі щодо центральних осей (осей, що проходять через центр тяжіння) рівні нулю (оскільки $x_c = 0$, $y_c = 0$).

Таким чином, осі, щодо яких статичний момент перетину рівний нулю, називаються центральними, а точка перетину центральних осей – центр тяжіння перетину.

7.2. Зміна статичного моменту перетину при паралельному перенесенні осей.

Знайдемо залежність між статичними моментами одного і того ж перетину щодо паралельних осей x , y і x_1 , y_1 (рис. 7.3).

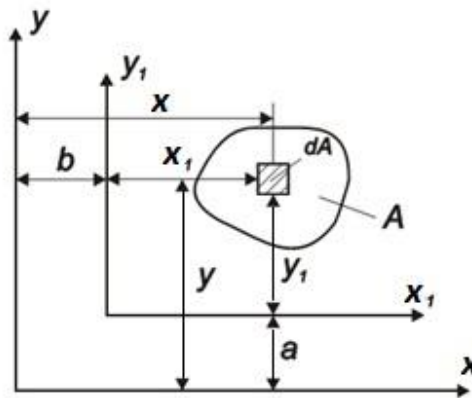


Рисунок 7.3 – Паралельні осі

Відповідно до визначення:

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_{x_1} = \int_A y_1 dA.$$

Проте, згідно побудові:

$$y_1 = y - a, \\ S_{x_1} = \int_A y_1 dA = \int_A (y - a) dA = S_x - aA, \quad (7.5)$$

аналогічно

$$z_1 = z - b,$$

$$S_{y_1} = \int_A x_1 dA = \int_A (x - b) dA = S_y - bA. \quad (7.6)$$

Якщо осі x_1 , y_1 проходять через центр тяжіння перетину, то з раніше сказаного $S_{x_1} = 0$, $S_{y_1} = 0$, тоді:

$$x_c = b = \frac{S_y}{A} \quad y_c = a = \frac{S_x}{A}. \quad (7.7)$$

Тобто знаючи статичний момент перетину і площу перетину можна визначити координату центра тяжіння.

7.3. Визначення центра тяжіння складної фігури.

Статичний момент складної фігури щодо деякої осі рівний сумі статичних моментів всіх частин цього перетину щодо тієї ж осі.

$$\begin{aligned} S_x &= S_{x_1} + S_{x_2} + \dots + S_{x_n} = A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i; \\ S_y &= S_{y_1} + S_{y_2} + \dots + S_{y_n} = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Координати центру тяжіння складної фігури можна знайти, скориставшись формулами (7.7), тоді:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_n \cdot x_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \\ y_c &= \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + \dots + A_n \cdot y_n}{A_1 + A_2 + \dots + A_n} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Послідовність дій для визначення центру тяжіння складної фігури (рис. 7.4) наступна. Розбити фігуру на прості частини, для кожної з яких відома площа A_i і положення центру тяжіння x_i і y_i . Визначити координати центру тяжіння складного перетину – формула (7.9).

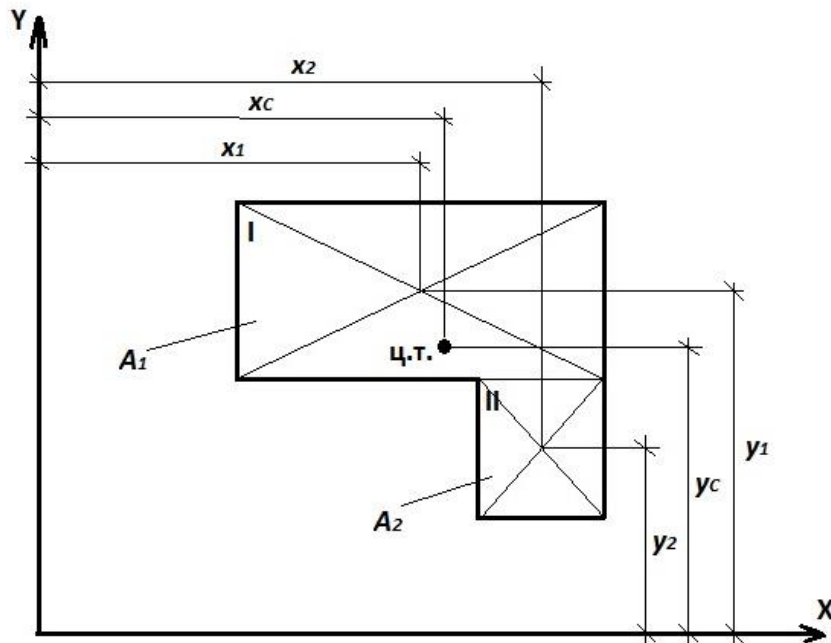


Рисунок 7.4 – Центр тяжіння складної фігури

7.4. Моменти інерції плоских перетинів.

За визначенням осьовим моментом інерції перетину щодо деякої осі називається, узятая за всією його площею A , сума творів елементарних перетинів dA на квадрати їх відстаней від цієї осі (рис. 7.5).

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA \quad (7.10)$$

I_x, I_y – моменти інерції плоского перетину щодо осей X і Y відповідно.

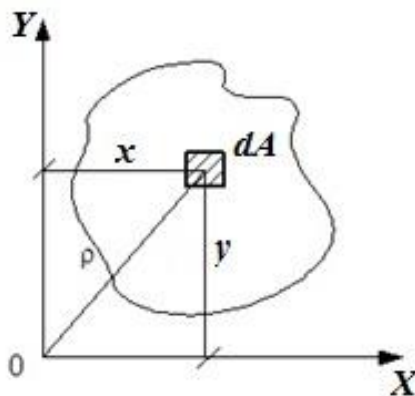


Рисунок 7.5 – Плоский перетин

Полярним моментом інерції площі перетину щодо даної точки (полюса 0) називають суму творів елементарних перетинів на квадрати їх відстаней від полюса

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (7.11)$$

Оскільки $\rho^2 = y^2 + x^2$, то з (7.11) маємо:

$$I_p = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A x^2 dA = I_x + I_y. \quad (7.12)$$

Слід зазначити, що величини осьових і полярних моментів інерції завжди позитивні.

Відцентровим моментом інерції щодо вибраної системи відліку називається сума творів площ елементарних перетинів на їх відстані від координатних осей X і Y :

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (7.13)$$

В залежності від положення осей відцентровий момент інерції може бути позитивним, негативним, або рівним нулю.

Розмірність моментів інерції – мм^4 , см^4 , м^4 .

7.5. Зміна моментів інерції перетину при паралельному перенесенні осей.

Наприклад відомі моменти інерції перетину щодо осей X і Y :

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad I_{xy} = \int_A xy dA.$$

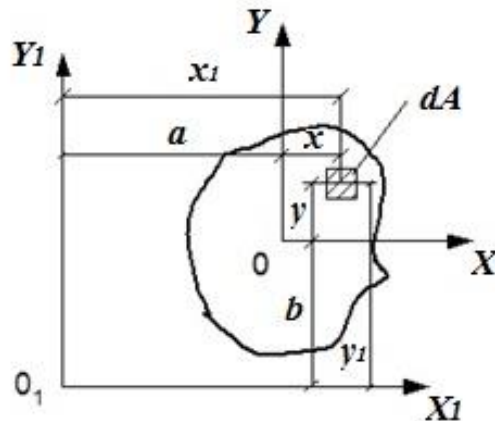


Рисунок 7.6 – Паралельне перенесення

Потрібно визначити моменти інерції цього ж перетину щодо осей X_1 і Y_1 (рис. 7.6):

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1} = \int_A x_1^2 dA; \quad I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA. \quad (7.14)$$

Координати будь-якої точки в новій системі x_1, y_1 можна виразити через координати в старих осях так: $x_1 = x + b$; $y_1 = y + a$. Підставляємо ці значення у формули (7.14) і інтегруємо:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + a^2 \int_A dA + 2a \int_A y dA = I_x + a^2 A + 2aS_x; \\ I_{y_1} &= \int_A x_1^2 dA = \int_A (x + b)^2 dA = \int_A x^2 dA + b^2 \int_A dA + 2b \int_A x dA = I_y + b^2 A + 2bS_y; \\ I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + ab \int_A dA + a \int_A x dA + b \int_A y dA = \\ &= I_{xy} + abA + aS_y + bS_x. \end{aligned}$$

Якщо припустити, що осі X, Y проходять через центр тяжіння перетину, то статичні моменти перетину щодо цих осей рівні нулю ($S_x = 0$ и $S_y = 0$). Тоді:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x + a^2 A; \\ I_{y_1} &= I_y + b^2 A; \\ I_{x_1 y_1} &= I_{xy} + abA. \end{aligned} \quad (7.15)$$

7.6. Головні осі. Головні моменти інерції

Головними осями називаються осі, щодо яких відцентровий момент інерції рівний нулю ($I_{xy} = 0$), а осьові моменти приймають екстремальні значення (один максимальне, інший мінімальне).

Головні осі, що проходять через центр тяжіння перетину, називаються головними центральними осями.

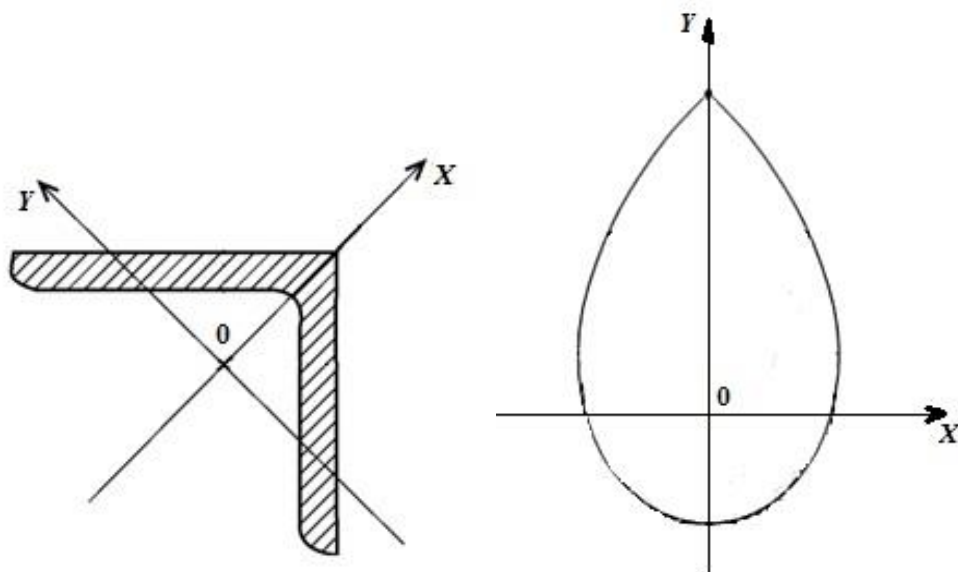


Рисунок 7.7 – Симетричні перетини

У багатьох випадках вдається відразу визначити положення головних центральних осей. Якщо фігура має вісь симетрії, то вона є однією з головних центральних осей, друга проходить через центр тяжіння перетину перпендикулярно до першої (приклади на рис. 7.6).

Осьові моменти інерції щодо головних осей називаються головними моментами інерції і вони приймають екстремальне значення. Рівнобокий куточок: $I_x - \min$; $I_y - \max$; крапля: $I_y - \min$; $I_x - \max$.

7.7. Головні моменти інерції простих фігур.

Обчислимо моменти інерції прямокутника щодо головних осей x , y .

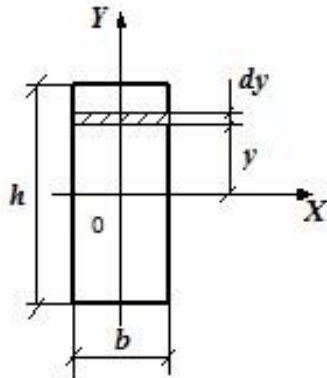


Рисунок 7.8 – Прямокутний перетин

Для визначення моменту інерції щодо осі x виділимо елементарний перетин у вигляді вузького прямокутника, паралельного осі x . Ширина елементу b , висота – dy . Отже, $dA = bdy$

$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = 2b \int_0^{h/2} y^2 dy = \frac{bh^3}{12},$$

аналогічно $I_y = \frac{hb^3}{12}.$

Обчислимо полярний момент інерції круга щодо головних осей, а також осьові моменти інерції.

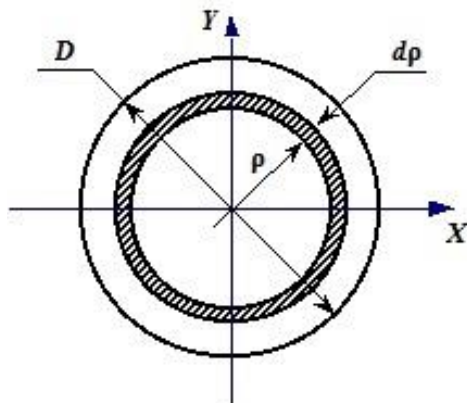


Рисунок 7.9 – Круглий перетин

При обчисленні полярного моменту інерції виділимо елементарну смужку у вигляді тонкого кільця товщиною $d\rho$. Площа такого елементу $dA = 2\pi\rho d\rho$. Полярний момент і осьові моменти інерції:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}$$

Обчислимо полярний момент інерції кільця щодо головних осей, а також осьові моменти інерції.

Виділимо елементарну смужку у вигляді тонкого кільця товщиною $d\rho$.

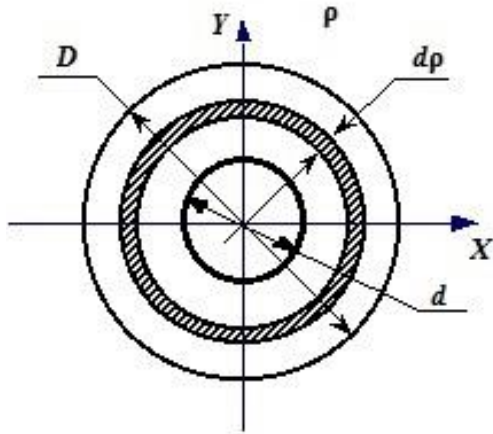


Рисунок 7.10 – Кільцевий перетин

Площа такого елементу $dA = 2\pi\rho d\rho$. В порівнянні з круглим перетином зміниться межі інтегрування:

$$\begin{aligned}
 I_p &= \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \\
 &= \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad \alpha = \frac{d}{D} \\
 I_x = I_y &= \frac{I_p}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4)
 \end{aligned}$$

7.8. Головні моменти інерції складних перетинів з віссю симетрії.

Момент інерції складного перетину щодо деякої осі рівний сумі моментів інерції його складових частин щодо тієї ж осі, що безпосередньо виходить з властивостей інтеграла:

$$I_{xc} = \sum_{i=1}^n I_{xci}, \quad I_{yc} = \sum_{i=1}^n I_{yci}. \quad (7.16)$$

Таким чином, для обчислення моменту інерції складного перетину треба розбити його на ряд простих перетинів, обчислити моменти інерції цих перетинів щодо головних осей (I_{xci}, I_{yci}). Оскільки перетин має вісь симетрії, то можна розбити його на прості таким чином, що головні осі простих перетинів будуть паралельні головним осям складного перетину. Тоді, скориставшись виразами (7.15), моменти інерції простих перетинів щодо головних осей можуть бути визначені наступним чином:

$$I_{xci} = I_{xi} + a_i^2 A_i, \quad I_{yci} = I_{yi} + b_i^2 A_i. \quad (7.17)$$

де I_{xi}, I_{yi} – головні моменти інерції простих перетинів; A_i – площі простих перетинів; a_i, b_i – відстані між головними осями простих і складного перетину. Підсумувавши I_{xci} і I_{yci} можна визначити шукані моменти інерції складного перетину з віссю симетрії.

$$I_{xc} = \sum_{i=1}^n I_{xi} + a_i^2 A_i, \quad I_{yc} = \sum_{i=1}^n I_{yi} + b_i^2 A_i. \quad (7.18)$$

Як приклад визначимо головні моменти інерції перетину представленого на рисунку 7.11.

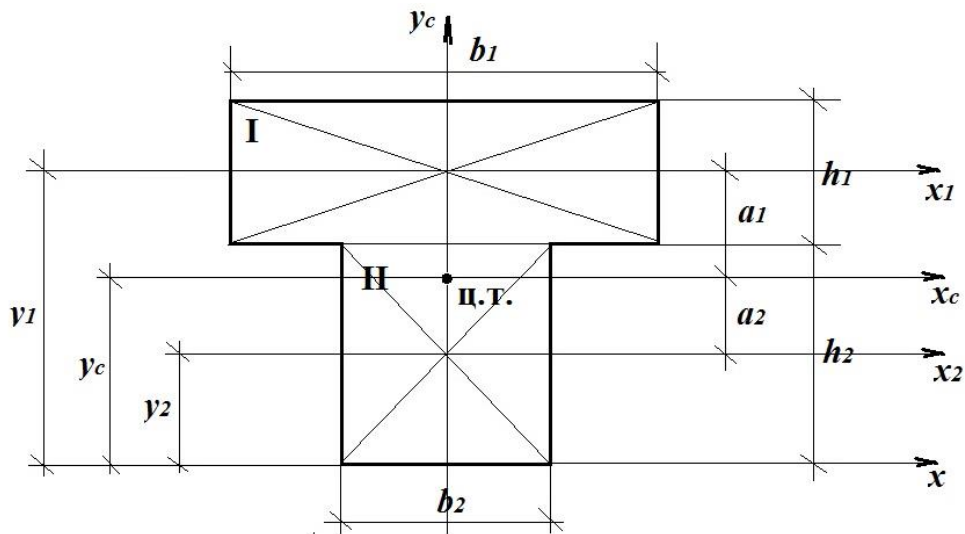


Рисунок 7.11 – Складний перетин з віссю симетрії

Напишемо порядок дій:

- Розбити складний перетин на прості (I і II), для яких відомі центри тяжіння;
- Знайти центр тяжіння складного перетину

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2},$$

де A_1, A_2 – площі простих перетинів;

- Провести головні осі складного перетину y_c, x_c ;
- Визначити головні моменти інерції простих перетинів щодо своїх головних осей

$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12}, \quad I_{x_2} = \frac{b_2 h_2^3}{12};$$

- Визначити значення головних моментів інерції простих перетинів щодо головної осі складного перетину

$$I_{x_{c1}} = I_{x_1} + a_1^2 A_1, \quad I_{x_{c2}} = I_{x_2} + a_2^2 A_2;$$

- Визначити головний момент інерції складного перетину щодо осі x_c

$$I_{x_c} = I_{x_{c1}} + I_{x_{c2}}.$$

- Аналогічно знайти головний момент інерції щодо осі y_c з урахуванням особливостей її розташування

$$I_{y_c} = I_{y_{c1}} + I_{y_{c2}},$$

$$I_{y_{c1}} = I_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12}, \quad I_{y_{c2}} = I_{y_2} = \frac{h_2 b_2^3}{12}.$$

7.9. Поняття про радіус інерції і момент опору.

Момент інерції фігури щодо якої-небудь осі можна представити у вигляді твору площі фігури на квадрат деякої величини, званої радіусом інерції:

$$I_x = \int_A y^2 dA = A \cdot i_x^2, \quad (7.19)$$

де i_x – радіус інерції щодо осі x .

З виразу (7.19) виходить, що

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}. \quad (7.20)$$

Аналогічно радіус інерції площі перетину щодо осі y

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}. \quad (7.21)$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{I_v}{A}}.$$

Осьовим моментом опору перетину називається відношення осьового моменту інерції до відстані від найбільш видаленої точки перетину до відповідної осі:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{I_y}{x_{\max}}. \quad (7.22)$$

Контрольні запитання:

1. Як впливає орієнтація поперечного перетину елементу на його деформацію при навантаженні?
2. Що таке статичний момент перетину?

3. Як визначити центр тяжіння складного перетину?
4. Моменти інерції плоского перетину.
5. Обчислення моментів інерції при паралельному перенесенні координатних осей.
6. Що таке головні і центральні осі інерції?
7. Обчислення головних моментів інерції.
8. Порядок обчислення головних моментів інерції складних перетинів.
9. Радіус інерції.
10. Момент опору.

Лекція 8. Деформація згин.

- 8.1. *Поняття про згин.*
- 8.2. *Внутрішні силові чинники в поперечних перетинах балки при згині.*
- 8.3. *Диференціальні залежності при згині.*
- 8.4. *Напруження, що виникають при чистому згині.*
- 8.5. *Умова міцності при деформації чистий згин.*
- 8.6. *Напруження, що виникають при поперечному згині.*

8.1. Поняття про згин.

Деформацією згин називається такий вид деформації при якому під дією зовнішніх силових чинників в кожному поперечному перетині тіла виникає внутрішній згинаючий момент і поперечна сила.

Допущення при згині (рис. 8.1)

- Плоскі перетини узяті до деформації залишаються плоскими і після деформації.
- Плоскі перетини в процесі деформації повертаються один щодо одного викликаючи розтяг одних волокон і стиск інших.
- Нейтральне волокно в процесі деформації не змінює своєї довжини.
- За рахунок розтягу і стиску волокон в кожному перетині виникає внутрішній згинаючий момент, який прагне повернути тіло в недеформований стан.

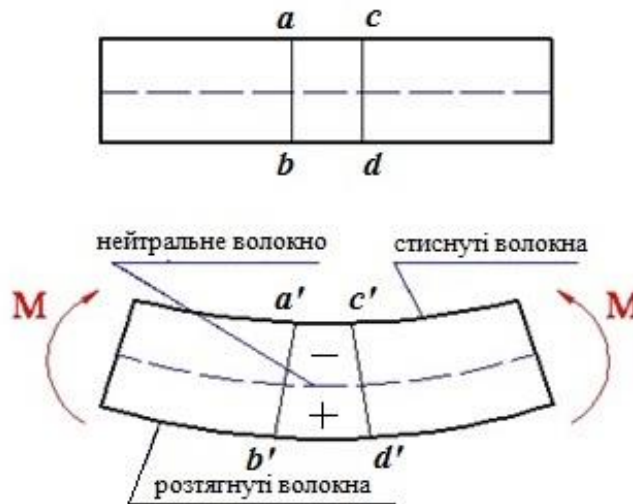


Рисунок 8.1 – Деформація згину

Якщо у якості внутрішнього силового чинника виникає тільки згинаючий момент, деформація називається чистий згин. Якщо крім згинаючого моменту виникає поперечна сила, то деформація називається поперечний згин або просто згин.

Брус, що працює на згин, прийнято називати балкою.

Згинаючий момент викликає в перетині нормальні напруження, поперечна сила – дотичні напруження.

8.2. Внутрішні сили чинники в поперечних перетинах балки при згині.

При розгляді деформації згину необхідно визначити розподіл внутрішніх силових чинників по довжині балки: поперечні сили $Q(z)$ і згинаючі моменти $M(z)$. Перетини, в яких вказані параметри приймають максимальне значення, є небезпечними і в них необхідно перевірити умову міцності.

Розглянемо приклади побудови епюр $Q(z)$ і $M(z)$.

Приклад №1 (рис. 8.2).

Балка спирається на рухомий і нерухомий циліндрові шарніри (опори) і навантажена зосередженою силою F . Необхідно побудувати епюри $Q(z)$ і $M(z)$, після чого визначити небезпечні перетини.

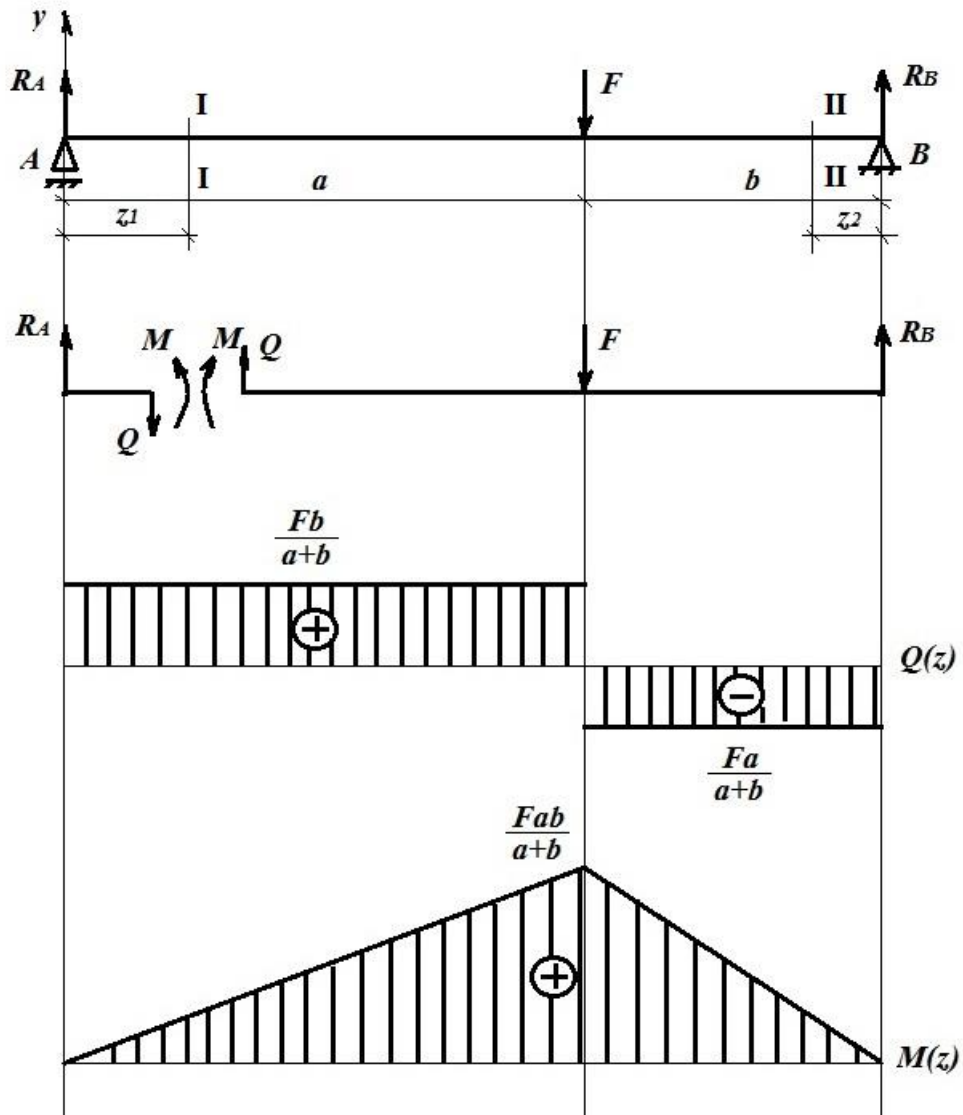


Рисунок 8.2 – Приклад побудови епюр

Визначимо реакції в опорах з умов статички

$$\sum M_B = 0; \quad \Rightarrow \quad -R_A \cdot (a+b) + F \cdot b = 0;$$

$$R_A = \frac{F \cdot b}{(a+b)};$$

$$\sum M_A = 0; \quad \Rightarrow \quad R_B \cdot (a+b) - F \cdot a = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot a}{(a+b)}.$$

Перевіримо знайдені реакції:

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; \quad & \Rightarrow \quad R_A + R_B - F = 0; \\ \frac{F \cdot b}{(a+b)} + \frac{F \cdot a}{(a+b)} - F &= 0; \quad \quad \quad 0 = 0. \end{aligned}$$

Спочатку визначимо ділянки балки на яких функції внутрішніх зусиль незмінні. Далі побудуємо функції зусиль на кожній ділянці.

Визначимо внутрішні силові чинники в перетині z_1 . Для цього скористаємося методом перетинів, тобто подумки розріжемо балку в цьому перетині і розглянемо рівновагу лівої частини балки під дією всіх зовнішніх і внутрішніх зусиль.

Для виконання умови рівноваги в перетині повинна виникати поперечна сила Q і згинаючий момент M , які за законом рівності сил дії і протидії на правому і лівому торці даного перетину повинні бути рівні по величині і протилежні по знаку.

Напишемо правило знаків при побудові епюр (рис. 8.3).

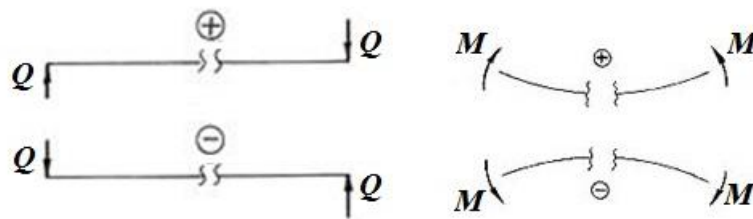


Рисунок 8.3 – Правило знаків для поперечних сил і згинаючих моментів

Використовуючи мнемонічні способи запам'ятовування на базі асоціативних законів можна представити:

- якщо поперечна сила Q , щодо даного перетину, повертає балку за годинниковою стрілкою, вона приймається позитивною «+» і якщо проти годинникової стрілки – негативною «-»;
- якщо згинаючий момент M , щодо даного перетину, згинає балку чашею вгору, він приймається позитивним «+» і якщо чашею вниз – негативним «-» (правило дощу).

Для лівої частини балки:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q(z_1) = R_A; \quad M(z_1) = R_A \cdot z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}; \quad M(z_1) = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = R_A = \frac{F \cdot b}{a + b}; \quad M(z_1) = R_A \cdot a = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

Для правої частини балки:

$$0 \leq z_2 \leq b$$

$$Q(z_2) = -R_B; \quad M(z_2) = R_B \cdot z_2;$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = R_B = \frac{F \cdot a}{a + b}; \quad M(z_2) = 0;$$

$$\text{при } z_2 = b \quad \Rightarrow \quad Q(z_2) = R_B = \frac{F \cdot a}{a + b}; \quad M(z_2) = R_B \cdot b = \frac{F \cdot b \cdot a}{a + b}.$$

По знайдених параметрах за допомогою характерних точок будуються епюри $Q(z)$ і $M(z)$. З епюр видно, що найнебезпечніший перетин балки знаходиться в точці додатку сили F , оскільки при деформації поперечного згину визначальною умовою міцності є нормальні напруження, які досягають максимуму в перетині, де епюра $M(z)$ має найбільше значення (незалежно від знаку).

Приклад №2 (рис. 8.3).

Балка підлягає дії рівномірно розподіленого навантаження q .

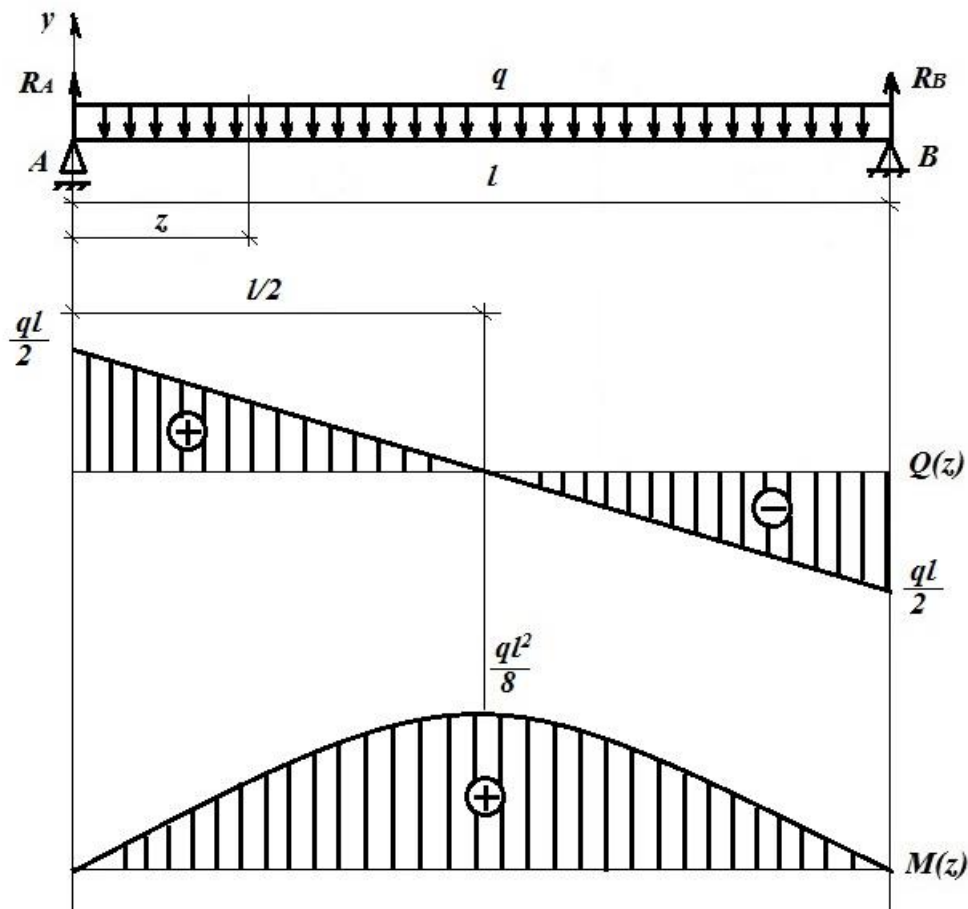


Рисунок 8.3 – Приклад побудови епюр

Через симетричність вантаження реакції в опорах рівні $R_A = R_B = \frac{q \cdot l}{2}$.

Для даної ділянки:

$$0 \leq z \leq l$$

$$Q(z) = R_A - q \cdot z; \quad M(z) = R_A \cdot z - q \cdot z \cdot \frac{z}{2};$$

$$\text{при } z=0 \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A = \frac{q \cdot l}{2}; \quad M(z) = 0;$$

$$\text{при } z=l \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A - q \cdot l = -\frac{q \cdot l}{2}; \quad M(z) = R_A \cdot l - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0;$$

$$\text{при } z = \frac{l}{2} \quad \Rightarrow \quad Q(z) = R_A - q \cdot \frac{l}{2} = 0; \quad M(z) = R_A \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q \cdot l^2}{8}.$$

Епюра $Q(z)$ – лінійна; епюра $M(z)$ – квадратична парабола. Небезпечний перетин – в точці максимуму епюри $M(z)$.

Приклад №3 (рис. 8.4).

Балка навантажена зосередженою силою F і моментом M .

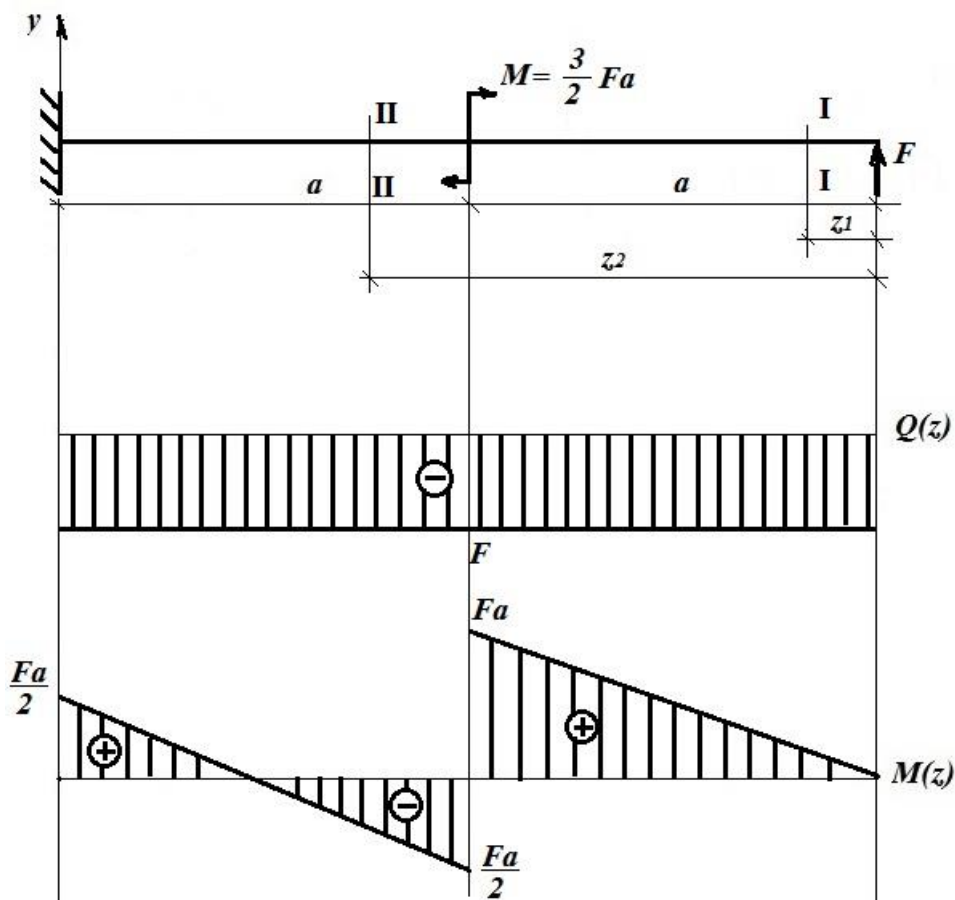


Рисунок 8.4 – Приклад побудови епюр

Розглядаючи рівновагу тільки правої частини балки, можна побудувати епюри $Q(z)$ і $M(z)$ без визначення реакцій в затисканні, а значення визначити по епюрах в даному перетині.

Для першої ділянки:

$$0 \leq z_1 \leq a$$

$$Q(z_1) = F; \quad M(z_1) = F \cdot z_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(z_1) = F; \quad M(z_1) = 0;$$

при $z_1 = a \Rightarrow Q(z_1) = F; \quad M(z_1) = F \cdot a.$

Для другої ділянки:

$$a \leq z_1 \leq 2 \cdot a$$

$$Q(z_2) = F; \quad M(z_2) = F \cdot z_2 - M;$$

при $z_2 = a \Rightarrow Q(z_2) = F; \quad M(z_2) = F \cdot a - \frac{3}{2} \cdot F \cdot a = -\frac{1}{2} \cdot F \cdot a;$

при $z_2 = 2 \cdot a \Rightarrow Q(z_2) = F; \quad M(z_2) = F \cdot 2 \cdot a - \frac{3}{2} \cdot F \cdot a = \frac{1}{2} \cdot F \cdot a.$

Небезпечний перетин балки – в точці додатку моменту M .

8.3. Диференціальні залежності при згині.

Розглянемо балку під дією довільного навантаження (рис. 8.5, а).

Виділимо на ділянці дії позитивно розподіленого навантаження елемент балки CD завдовжки dz . Оскільки елемент dz – малий, то в межах цього елемента розподілене навантаження вважаємо постійним (рис. 8.5, б).

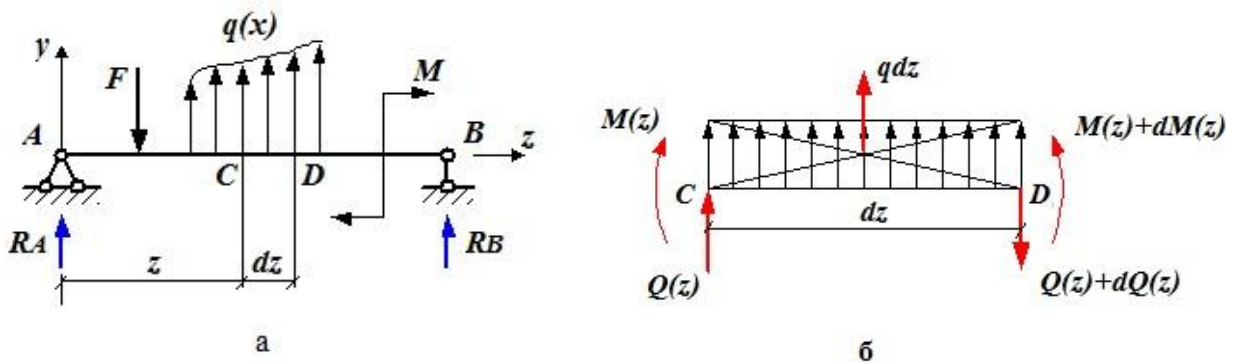


Рисунок 8.5 – Приклад довільного навантаження балки

Елемент знаходиться в стані рівноваги. Запишемо статичні рівняння рівноваги.

$$\sum F_y = Q(z) + qdz - (Q(z) + dQ(z)) = 0; \quad (8.1)$$

$$\sum M_D = M(z) + Q(z)dz + qdz \frac{dz}{2} - (M(z) + dM(z)) = 0. \quad (8.2)$$

З виразу (8.1) маємо:

$$\frac{dQ(z)}{dz} = q. \quad (8.3)$$

З другої умови рівноваги (8.2) одержимо (доданками другого порядку малості нехтуємо):

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z). \quad (8.4)$$

Продиференціюємо одержаний вираз (8.4):

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = \frac{dQ(z)}{dz} = q. \quad (8.5)$$

Враховуючи, що розподілене навантаження постійне $q = \text{const}$, запишемо:

$$\begin{aligned} Q &= \int q dz = qz + Q_0 \\ M &= \int Q dz = q \frac{z^2}{2} + Q_0 z + M_0 \end{aligned} \quad (8.6)$$

Одержані залежності (8.6) між зусиллями і інтенсивністю навантаження називаються диференціальними залежностями при згині. Вони використовуються для контролю правильності побудови епюр $Q(z)$ і $M(z)$:

- Якщо $q = 0$, $Q(z) = Q_0 = \text{const}$, а $M(z) = Q_0 z + M_0$. Отже, на тих ділянках, де немає розподіленого навантаження, епюра $Q(z)$ обмежена прямою, паралельною базовій лінії, а епюра $M(z)$ – похилою прямою.
- Якщо $q(z) = q_0 = \text{const}$, то $Q(z) = qz + Q_0$ – лінійна функція, а $M(z) = q \frac{z^2}{2} + Q_0 z + M_0$ – парабола, яка має опуклість направлену у бік дії

навантаження. Оскільки $\frac{dM(z)}{dz} = Q(z)$, то на тих ділянках, де функція моменту зростає, поперечна сила $Q(z)$ позитивна, при убутті – негативна. У перетинах, де $Q(z) = 0$, згинаючий момент досягає екстремальних значень.

8.4. Напруження, що виникають при чистому згині.

Розглянемо приклад розрахункової моделі навантаженої балки, для якого побудуємо епюри Q і M , користуючись раніше приведеними правилами (рис. 8.4).

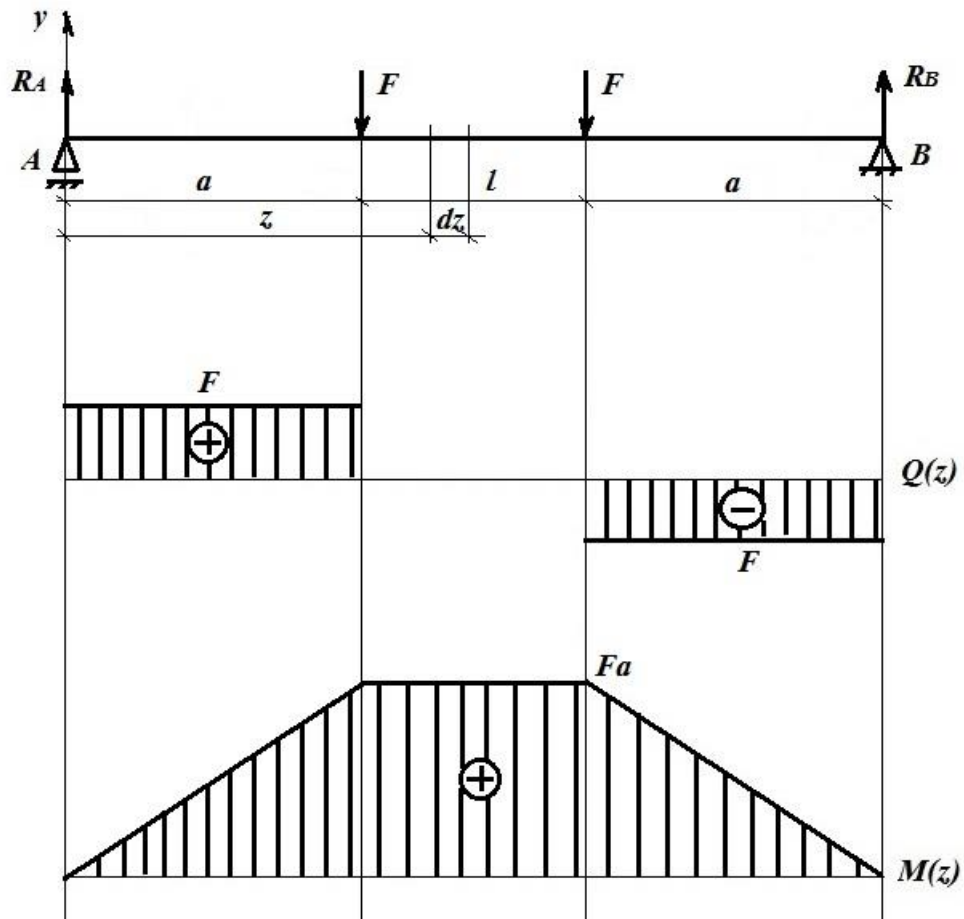


Рисунок 8.6 – Розрахункова модель навантаженої балки

На ділянці l – $Q=0$, $M = const$ (рис. 8.6), отже, має місце чистий згин. Балка на цій ділянці приймає форму дуги кола.

Розглянемо елемент dz , узятий на цій ділянці (рис. 8.7, а).

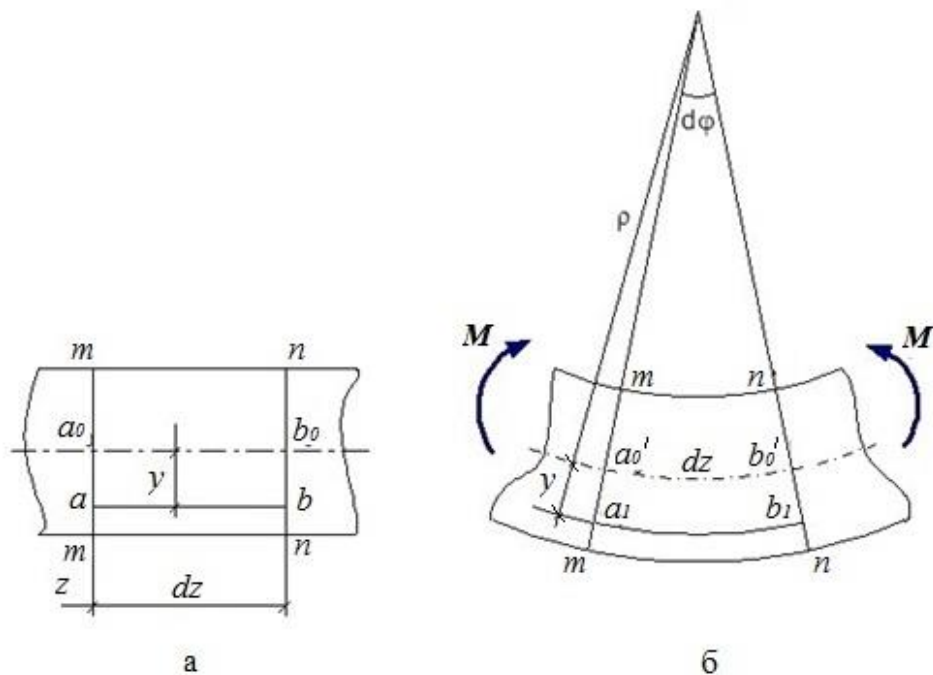


Рисунок 8.7 - Елемент із зони чистого згину

Після деформації перетину $m-m$ і $n-n$ залишаються плоскими і обертаються на малий кут $d\varphi$. Елемент a_0b_0 нейтрального шару перетворюється на дугу $a'_0b'_0$ з радіусом кривизни ρ , а волокно ab , що знаходиться на відстані y від нейтрального шару – в криволінійне волокно a_1b_1 з радіусом кривизни $\rho + y$ (рис. 8.5, б).

Визначимо деформацію довільного волокна ab .

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}, \quad (8.7)$$

де $a_1b_1 = (\rho + y)d\varphi$, $ab = dz = \rho d\varphi$, тоді

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi}.$$

Звідси

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (8.8)$$

Оскільки дане волокно ab підлягає деформації розтягу (внутрішній згинаючий момент викликає в кожній точці перетину нормальні напруження), то згідно закону Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{y}{\rho} E, \quad (8.9)$$

рівняння (8.9) – закон Гука для чистого згину. На практиці даним виразом скористатися не можна, оскільки невідомо значення радіусу кривизни ρ .

Визначимо його величину, для цього виділимо з площі поперечного перетину елементарний елемент dA , положення якого описується координатами x і y . Елементарна нормальна сила, що діє на цьому перетину, буде рівна σdA (рис. 8.8).

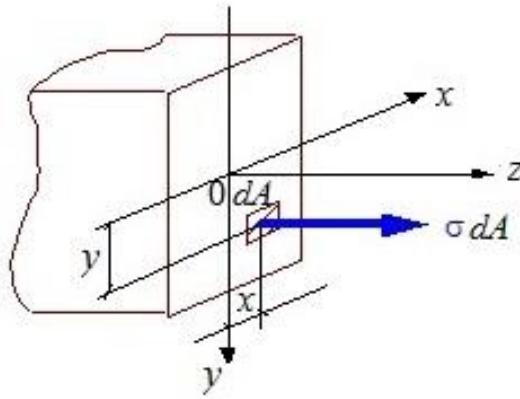


Рисунок 8.8 – Елемент перетину

Запишемо рівняння рівноваги для даного елемента:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \int_A \sigma dA = 0, \quad (8.10)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \int_A \sigma x dA = 0, \quad (8.11)$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (8.12)$$

З виразу (8.10):

$$\frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0,$$

звідси витікає, що статичний момент перетину рівний нулю $S_x = \int_A y dA = 0$ – вісь проходить через центр тяжіння перетину.

З виразу (8.11):

$$\frac{E}{\rho} \int_A xy dA = 0,$$

що означає рівність нулю відцентрового моменту інерції $I_{xy} = \int_A xy dA = 0$ – вісь y є головною віссю. Звідси осі x і y – головні центральні осі перетину.

З рівняння рівноваги (8.12), що залишилося, можемо визначити невідому кривизну:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}, \quad (8.13)$$

де I_x – головний момент інерції.

Твір EI_x прийнято називати жорсткістю перетину при деформації згин.

Підставивши одержаний вираз (8.13) в закон Гука для чистого згину (8.9) одержимо наступну залежність:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_x}. \quad (8.14)$$

Ця формула дозволяє обчислювати нормальні напруження при чистому згині балки в будь-якій точці її поперечного перетину.

Аналізуючи одержану формулу для визначення напружень можна відзначити: яку б форму і розміри не мав перетин, напруження в точках нейтральної лінії рівні нулю; величина σ лінійно зростає по висоті перетину від нейтральної лінії, при цьому напруження виявляються постійними по ширині перетину. Найбільшої величини (σ_{\max}) напруження досягають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної лінії (рис. 8.9).

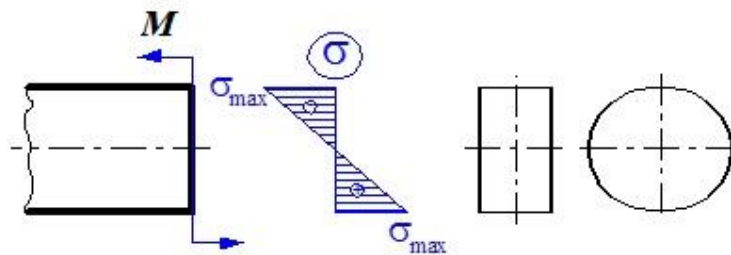
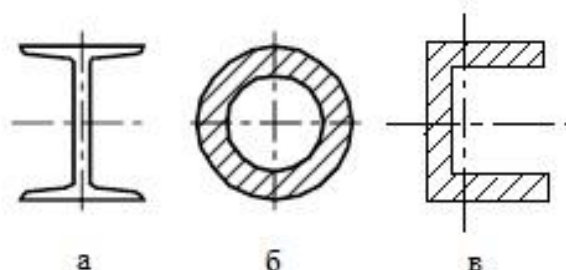


Рисунок 8.9 – Розподіл нормальних напружень по висоті перетинів

На відміну від деформації розтяг-стиск при згині напруження по перетину розподіляються нерівномірно (рис. 8.9). Матеріал, розташований у нейтрального шару навантажений мало. Тому в цілях його економії і зниження ваги елементів конструкції, що працюють на згин, слід вибирати такі форми перетину, щоб велика частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії (рис. 8.10).



а б в
двутавр кільце швелер

Рисунок 8.10 – Раціональні перетини

8.5. Умова міцності при деформації чистий згин.

Величина найбільшого діючого в перетині напруження σ_{\max} повинна бути обмежена допустимим напруженням $[\sigma]$.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_x} \leq [\sigma]. \quad (8.15)$$

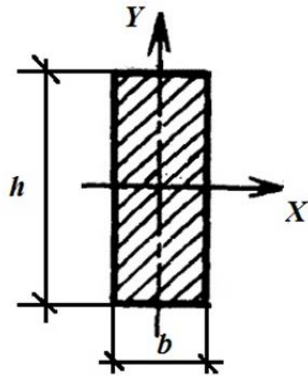
$\frac{I_x}{y_{\max}} = W_x$ – момент опору перетину. Тоді

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (8.16)$$

(8.16) – умова міцності при чистому згині.

Визначимо моменти опору простих перетинів.

Прямокутний перетин



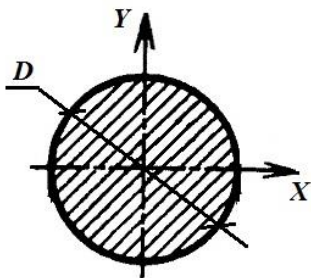
$$y_{\max} = \frac{h}{2};$$

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{b \cdot h^2}{6};$$

аналогічно

$$W_y = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

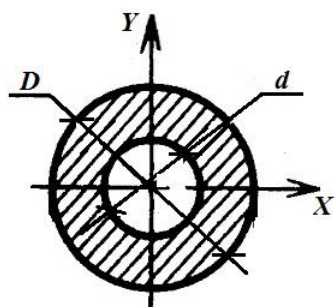
Круглий перетин



$$y_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \approx 0,1 \cdot D^3.$$

Кільцевий перетин



$$y_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot D^4 \cdot 2}{64 \cdot D} \cdot (1 - \alpha^4) = \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \approx 0,1 \cdot D^3 \cdot (1 - \alpha^4).$$

8.6. Напруження, що виникають при поперечному згині.

При поперечному згині в кожному поперечному перетині виникають внутрішні згинаючі моменти і поперечні сили. Згинаючий момент викликає нормальні напруження, а поперечна сила – дотичні.

Нормальні напруження з достатньою точністю для практичних розрахунків можуть бути визначені, як для чистого згину (див. формулу (8.14)).

Дотичні напруження визначаються по формулі Журавського:

$$\tau = \frac{QS_x^*}{b_y I_x}, \quad (8.16)$$

де Q – поперечна сила в даному перетині; I_x – момент інерції перетину щодо осі x ; S_x^* – статичний момент щодо нейтральної осі x частини перетину розташованої між даним і крайнім волокном; b_y – ширина перетину в даному волокні y .

Визначимо розподіл дотичних напружень в балці прямокутного перетину.

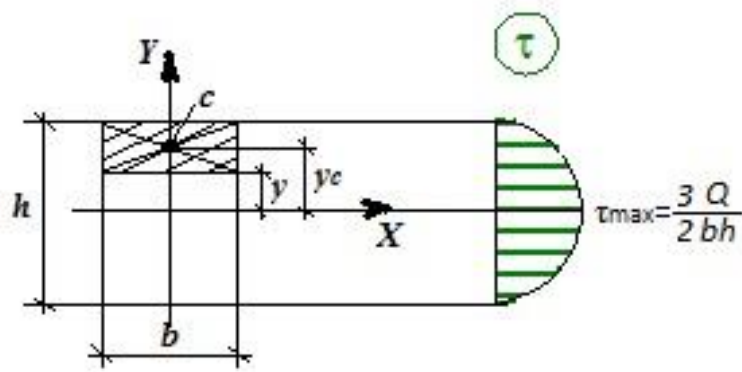


Рисунок 8.11 – Розподіл дотичних напружень по висоті прямокутного перетину

Визначимо значення τ для поточної координати y . Тоді

$$S_x^* = A^* \cdot y_c = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right);$$

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad b_y = b;$$

$$\tau = \frac{Q \cdot \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q}{b \cdot h^3} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Епюра τ по висоті перетину має форму квадратичної параболи.

$$\begin{aligned} \text{При } y = 0 & \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h}; \\ \text{при } y = \pm \frac{h}{2} & \Rightarrow \tau = 0. \end{aligned}$$

Формула Журавського і розглянутий приклад дозволяють зробити деякі висновки про розподіл дотичних напружень в перетинах при поперечному згині:

- вид епюри τ залежить від форми поперечного перетину балки;
- у крайніх найбільш віддалених від нейтральної лінії крапках напруження τ завжди рівні нулю;
- найбільшої величини дотичні напруження для більшості видів перетинів досягають на нейтральній лінії перетину.

Контрольні запитання:

1. Згин. Допущення.
2. Диференціальні залежності при згині.
3. Правила контролю побудови епюр при згині.
4. Закон Гука для чистого згину.
5. Визначення нормальних напружень при чистому згині.
6. Умова міцності при деформації чистий згин.
7. Підбір раціональної форми перетину при деформації чистий згин.
8. Поперечний згин.

Лекція 9. Чистий зсув. Кручення.

- 9.1. *Поняття про чистий зсув. Деформації при чистому зсуві.*
- 9.2. *Напруження, що виникають на довільному перерізу розташованому під кутом при деформації чистий зсув.*
- 9.3. *Закон Гука при чистому зсуві.*
- 9.4. *Практичні розрахунки з'єднань, що працюють на зсув.*
- 9.5. *Кручення бруса круглого поперечного перетину.*
- 9.6. *Умова міцності при крученні.*

9.1. Поняття про чистий зсув. Деформації при чистому зсуві.

Чистим зсувом називається такий вид деформації, при якому, під дією зовнішніх силових факторів, в кожному поперечному перетині тіла виникають поперечні сили, а на гранях виділеного елемента діють тільки дотичні напруження (рис. 9.1).

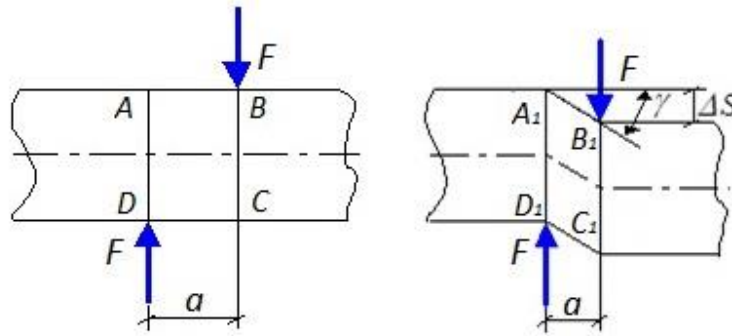


Рисунок 9.1 – Деформація зсув

При чистому зсуві спостерігаються лінійні і кутові деформації. Розглянемо деформацію елементарного перетину під дією деформації чистий зсув (рис. 9.2).

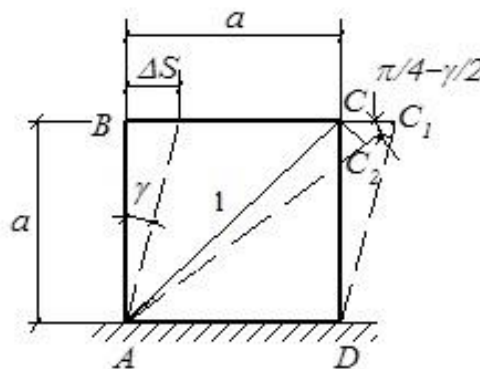


Рисунок 9.2 – Деформація елементу, що зазнає чистий зсув

В результаті зсуву один поперечний перетин зсувається щодо іншого на величину ΔS , яка називається абсолютною величиною зсув (розмірність – лінійна). Відношення абсолютної величини зсув до відстані між перетинами, в яких прикладені зсуваючі навантаження, називається відносною деформацією зсуву або кутом зсуву:

$$\frac{\Delta S}{a} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Оскільки, при малих деформаціях $\operatorname{tg} \gamma \cong \gamma$, то

$$\frac{\Delta S}{a} = \gamma. \quad (9.1)$$

Знайдемо подовження діагоналі AC , довжина якої $\ell = a\sqrt{2}$ ($ABCD$ – квадрат із стороною a).

Розглядаючи геометричну картину деформації, одержимо:

$$\Delta \ell = C_1 C_2 = CC_1 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2} \right) \cong CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

Тоді відносне подовження діагоналі дорівнює

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta S}{\sqrt{2} \cdot a \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta S}{a} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2}. \quad (9.2)$$

Звідки витікає, що лінійна деформація рівна половині кутової.

9.2. Напруження, що виникають на довільному перерізу розташованому під кутом при деформації чистий зсув.

Виріжемо з елемента під дією деформації чистий зсув тригранну призму з кутом α до похилої поверхні (рис. 9.3). На похилій поверхні виникають нормальні напруження σ_α і дотичні напруження τ_α .

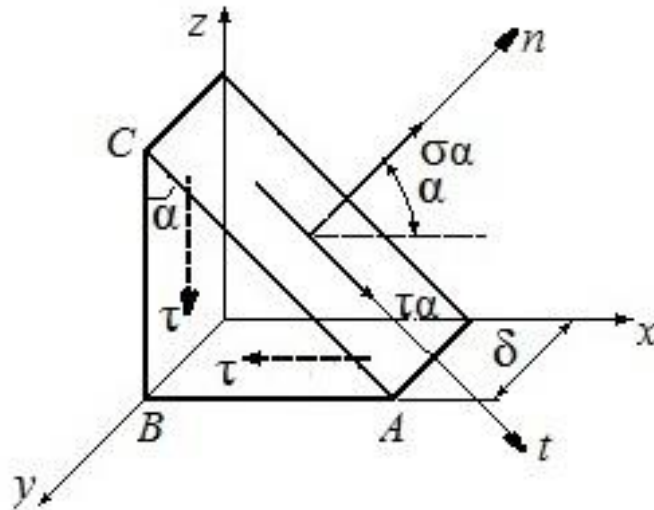


Рис. 9.3 – Розподіл напружень на гранях тригранної призми

Розглянувши рівновагу тригранної призми під дією прикладених напружень

$$\sum F_n = 0 \Rightarrow \sigma_\alpha AC \delta = \tau AB \delta \cos \alpha + \tau BC \delta \sin \alpha,$$

$$\sum F_t = 0 \Rightarrow \tau_\alpha AC \delta = \tau AB \delta \sin \alpha - \tau BC \delta \cos \alpha,$$

одержимо вирази для напружень на перетині розташованому під кутом:

$$\sigma_\alpha = \tau \sin \alpha \cos \alpha + \tau \cos \alpha \sin \alpha = \tau \sin 2\alpha, \quad (9.3)$$

$$\tau_\alpha = -\tau \sin^2 \alpha + \tau \cos^2 \alpha = \tau \cos 2\alpha. \quad (9.4)$$

Перевіримо отримані значення напружень при різних величинах кута α .

$$\begin{aligned}
\alpha = 0 &\Rightarrow \sigma_\alpha = 0 \quad \tau_\alpha = \tau \\
\alpha = 90 &\Rightarrow \sigma_\alpha = 0 \quad \tau_\alpha = -\tau \\
\alpha = \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} 45 &\Rightarrow \sigma_\alpha = \begin{smallmatrix} + \\ - \end{smallmatrix} \tau \quad \tau_\alpha = 0
\end{aligned}
\tag{9.5}$$

Звідси витікає, що якщо елемент під дією деформації чистий зсув, повернути на кут 45° , то на його гранях діятимуть тільки нормальні напруження. При цьому на двох гранях вони будуть такими, що розтягують, а на двох інших стискають (рис. 9.4).

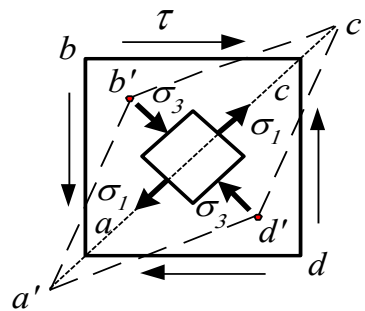


Рисунок 9.4 – Напруження при чистому зсуві

9.3. Закон Гука при чистому зсуві.

Визначимо повну деформацію уздовж напрямку дії напруження σ_1 (рис. 9.4).

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_3', \tag{9.6}$$

де $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$, $\varepsilon_3' = -\mu\varepsilon_3 = -\mu\frac{\sigma_3}{E}$, при цьому $\sigma_1 = \tau$; $\sigma_3 = -\tau$ (див. вирази (9.5)), тоді повна деформація з урахуванням залежності (9.2):

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu). \tag{9.7}$$

Звідки одержуємо закон Гука для чистого зсуву:

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \mu)}\gamma = G\gamma, \tag{9.8}$$

де G – модуль зсуву.

9.4. Практичні розрахунки з'єднань, що працюють на зсув

На зсув розраховують в основному сполучні елементи конструкцій, які використовуються для з'єднання між собою елементів і деталей інженерних конструкцій (заклепки, болти, зварні шви і т. і.)

З теоретичної точки зору ці розрахунки вельми недосконалі, оскільки ґрунтуються на ряду допущень, що спрощують розрахунок. Наприклад, що в перетині, по якому може відбутися руйнування від зсуву, дотичні напруження розподілені рівномірно; або що всі заклепки в заклепувальному з'єднанні знаходяться в однакових умовах (передавані зусилля між заклепками розподіляються рівномірно, що в пружній зоні деформації матеріалу не відповідає дійсності).

Розглянемо заклепувальне з'єднання (рис. 9.5). Заклепки знаходяться під дією напруження зрізу по двох поперечних перетинах і називаються двозрізними заклепками.

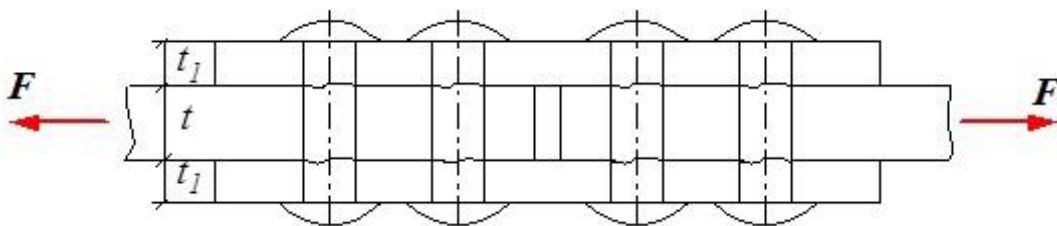


Рисунок 9.5 – Приклад заклепувального з'єднання

Якщо число площин зрізу позначити через m , а число заклепок, розташованих по одну сторону від стику, в з'єднанні через n , то площа зрізу з'єднання

$$A_{зр} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot m.$$

Умова міцності з'єднання на зріз має вигляд:

$$\tau = \frac{F}{A_{зр}} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot n \cdot m} \leq [\tau].$$

Вона дозволяє виконувати три види розрахунків на міцність – перевірочний, проектувальний і визначення максимально допустимого навантаження на з'єднання.

Проектувальний розрахунок:

- якщо n – відомо, то $d \geq \sqrt{\frac{4F}{\pi n m [\tau]}}$;
- якщо d – відомо, то $n \geq \frac{4F}{\pi d^2 m [\tau]}$.

Кількість зрізів заклепки m визначається самою конструкцією з'єднання.

Деформація зсув часто супроводжується зминанням.

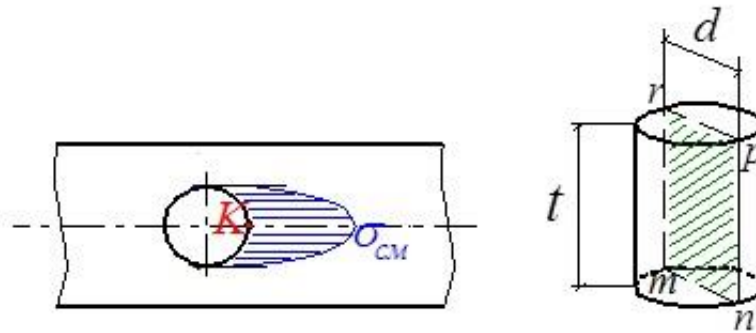


Рисунок 9.6 – Поверхня зминання заклепки

Зминанням називається місцева деформація стиску, коли дія стискаючої сили передається на порівняно невелику ділянку.

У заклепувальному з'єднанні зминальні напруження розподіляються по напівциліндричній поверхні отвору листа і заклепки нерівномірно і мають найбільшу величину у точці K (рис. 9.6).

Для спрощення розрахунку умовно приймають, що зминання відбувається на площі mnr

$$A_{зм} = td ,$$

де d – діаметр заклепувального отвору; t – товщина листа.

Якщо товщина листів, що сполучаються, різна, то у формулу слід підставити меншу з них.

Для двозрізних заклепок (рис. 9.5) умовною площею що зминається є $A_{зм} = t \cdot d$ або $A_{зм} = 2 \cdot t_1 \cdot d$. У розрахунок вводять меншу з них.

Припустимо, що зминальні напруження розподіляються рівномірно, тоді умова міцності з'єднання на зминання набуває вигляду:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{n \cdot A_{зм}} \leq [\sigma_{зм}],$$

де n - число заклепок; $[\sigma_{зм}]$ – допустні напруження на зминання.

9.5. Кручення бруса круглого поперечного перетину.

Кручення – такий вид деформації, при якому під дією зовнішніх силових факторів в кожному поперечному перетині тіла виникає крутний момент. Вся решта силових чинників відсутня.

При розгляді деформації кручення звичайно виділяють два завдання:

- визначення напружень в перетині;
- визначення кута закручування даного перетину.

Стрижні будь-якої форми поперечного перетину, що працюють на кручення, називаються валами.

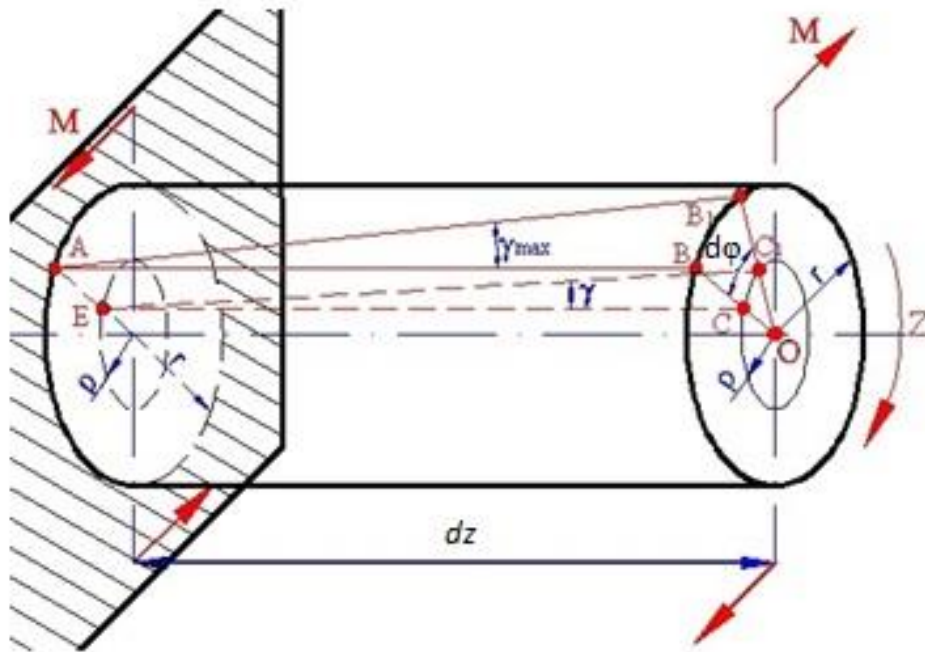


Рисунок 9.7 – Деформація кручення

Вирішення задачі визначення напружень і кутів закручування при крученні істотним чином залежить від форми поперечного перетину елемента. Найпростіше такі завдання розв'язуються для стрижнів круглого і кільцевого поперечного перетину.

Розглянемо елемент валу завдовжки dz , крайній лівий перетин якого вважатимемо умовно нерухомим (рис. 9.7). Неважко показати, що даний елемент випробовує деформацію зсуву. Дійсно, будь-яка зовнішня створююча AB або внутрішня EC при крученні зміщується, і виникають переміщення, які можна охарактеризувати кутами зсуву γ_{\max} для AB або γ – для EC .

Радіус OC повертається в положення OC_1 на кут $d\phi$, який називають кутом закручування. Оскільки деформації малі, то виражаючи CC_1 як дугу кола, можна одержати співвідношення між кутом зсуву γ і кутом закручування $d\phi$.

З одного боку $CC_1 = \gamma dz$, розглядаючи іншу площину $CC_1 = \rho d\phi$. Остаточно можемо записати:

$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dz} = \rho \Theta, \quad (9.9)$$

Θ – відносний кут закручування.

Оскільки елемент випробовує чистий зсув, то з урахуванням виразу (9.9) і закону Гука при зсуві (9.8) одержимо закон Гука для кручення:

$$\tau = G\gamma = G\rho\Theta. \quad (9.10)$$

Скористатися даною формулою для визначення дотичних напружень при крученні не представляється можливим, оскільки не відома величина Θ .

Для того, щоб виразити величину відносного кута закручування Θ розглянемо рівняння, що зв'язує крутний момент з напруженнями:

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA, \quad (9.11)$$

де τ – дотичні напруження, що діють на елементарному перетині dA , розташованому на відстані ρ від центру перетину (рис. 9.4).

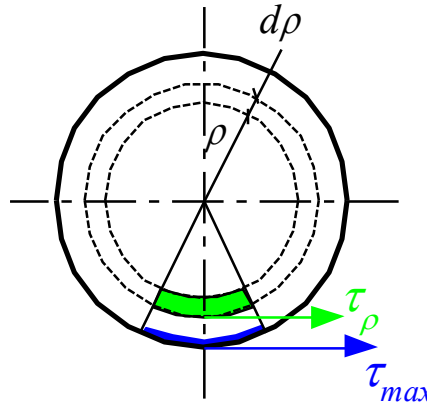


Рисунок 9.8 – Елемент круглого перетину

Перетворюємо вираз (9.11) далі

$$M_{кр} = \int_A \tau \rho dA = \int_A G \Theta \rho^2 dA = G \Theta \int_A \rho^2 dA = G \Theta I_p,$$

де I_p – полярний момент інерції перетину.

Звідси одержимо формулу для відносного кута закручування круглого валу

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{GI_p}, \quad (9.12)$$

де GI_p – жорсткість перетину при крученні.

З виразу (9.12) можна записати розрахункову формулу для визначення кутів закручування:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}}{GI_p} dx. \quad (9.13)$$

Якщо крутні моменти постійні в межах ділянки валу довжиною l , то

$$\varphi = \Theta l = \frac{M_{кр} l}{GI_p} \quad (9.14)$$

Для визначення дотичних напружень τ у будь-якій точці перетину валу підставимо у формулу (9.10) вираз для Θ (9.12). Тоді

$$\tau = \frac{M_{кр} \cdot \rho}{I_p}. \quad (9.15)$$

Дотичні напруження по перетину розподіляються по трикутній залежності з максимумом в крайніх волокнах.

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр} \cdot \rho_{\max}}{I_p} = \frac{M_{кр}}{W_p}, \quad (9.16)$$

де $W_p = I_p / \rho_{\max}$ – полярний момент опору.

9.6. Умова міцності при крученні.

Умова міцності при крученні з урахуванням прийнятих позначень формулюється таким чином: максимальні дотичні напруження, що виникають в небезпечному перетині валу, не повинні перевищувати допустимих напружень і записується у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_p} \leq [\tau], \quad (9.17)$$

де $[\tau]$ - допустні напруження при крученні (чистому зсуві).

Контрольні запитання:

1. Поняття про чистий зсув.
2. Деформації при чистому зсуві.
3. Напруження на похилому перетині при чистому зсуві.
4. Закон Гука при чистому зсуві.
5. Дайте визначення деформації кручення.
6. Запишіть закон Гука при крученні.
7. Розрахункова формула для визначення кутів повороту.
8. Розрахункова формула для визначення напружень в перетині при крученні.
9. Умова міцності при крученні.

Лекція 10. Основи теорії складно-напруженого стану.

10.1. Напружений стан у точці.

10.2. Головні перетини і головні напруження.

10.3. Круг напружень Мору.

10.4. Побудова круга Мору. Пряме і зворотнє завдання круга Мору.

10.5. Узагальнений закон Гука.

10.6. Теорії міцності.

10.1. Напружений стан у точці.

Розглянемо тіло, що знаходиться в рівновазі під дією просторової системи сил. Для дослідження напруженого стану тіла виберемо довільну точку A і визначимо виникаючі в цій точці напруження (рис. 10.1).

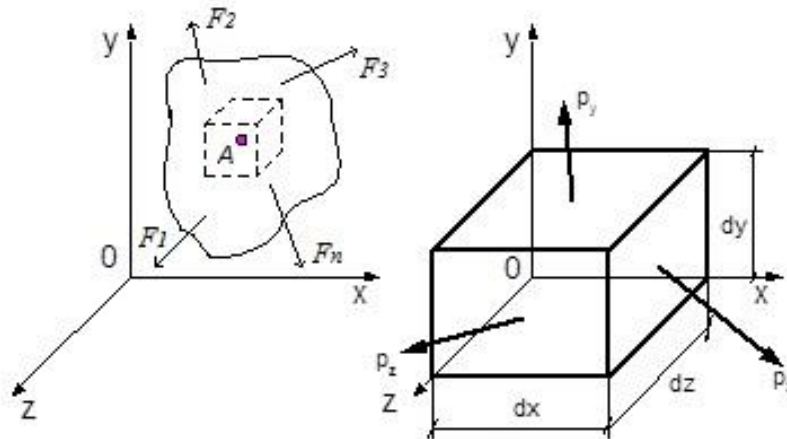


Рисунок 10.1 – Напружений стан у точці

Оскільки матеріал даного тіла однорідний і безперервний, можна перейти від точки до нескінченно малого об'єму, що включає точку A . На гранях паралелепіпеда виникають внутрішні сили, які замінюють дію відкинутої частини тіла. Ці сили p_x , p_y , p_z (рис. 10.1) називають повними напруженнями. Тут індекси відповідають нормалі до перетинів, на яких діють напруження. Оскільки виділений елемент малий, то можна вважати, що напруження на кожній грані розподіляються рівномірно.

Розкладемо вектора повних напружень по трьом взаємно-перпендикулярним напрямках, співпадаючих з координатними осями. Напруження, перпендикулярні до площини, позначаються σ з індексом, відповідним нормалі до перетину, на якому вони діють, і називаються нормальними. Напруження, що діють в площині грані паралелепіпеда, називаються дотичними – τ з двома індексами: перший відповідає нормалі до перетину, другий – напрямку дії напружень (рис. 10.2).

Таким чином, на кожній грані виділеного елемента діють три компоненти повного напруження. Сукупність напружень, що діють по всіх гранях, можна представити у вигляді матриці (тензора напружень):

$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (10.1)$$

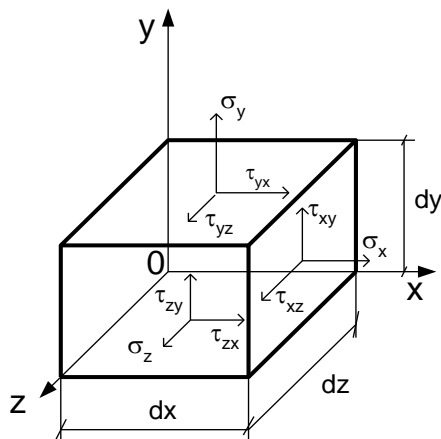


Рисунок 10.2 – Компоненти повного напруження

Величина кожного з вказаних напружень залежить від орієнтації перетину в просторі, але величина повного напруження в точці A залежить тільки від зовнішніх сил.

Виходячи із закону парності дотичних напружень, можемо записати:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}. \quad (10.2)$$

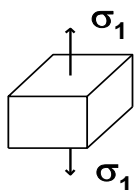
Таким чином, маємо шість невідомих (3-и нормальних і 3-и дотичних напруження). Склавши 6-ть рівнянь статички одержимо статично визначну систему з якої можна знайти невідомі значення напружень.

10.2. Головні перетини і головні напруження

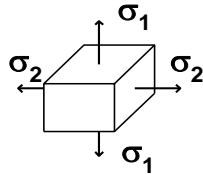
Повертаючи даний елемент (рис. 10.2) в просторі можна знайти таке положення, при якому дотичні напруження на гранях елемента будуть рівні нулю. Такі грані називаються головними перетинами, осі перпендикулярні їм – головними осями, а нормальні напруження, що діють на цих перетинах, – головними напруженнями.

Головні Напруження позначають $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. При цьому вони ранжуються наступним чином – $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

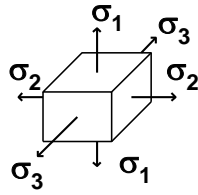
Якщо одне з головних напружень або два, або всі три одночасно відмінні від нуля, то ми одержимо різні види напружених станів, а саме:



– одновісний, лінійний
 $\sigma_1 \neq 0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$



– двовісний, плоский
 $\sigma_1 > \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 = 0$



– тривісний, об'ємний
 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$

10.3. Круг напружень Мору.

Зручне двовимірне геометричне представлення тривимірного напруженого стану було запропоновано німецьким вченим Мором.

Визначимо напруження, що виникають на перетину, який розташований під кутом, якщо відомі головні напруження і перетин перпендикулярний одному з головних перетинів.

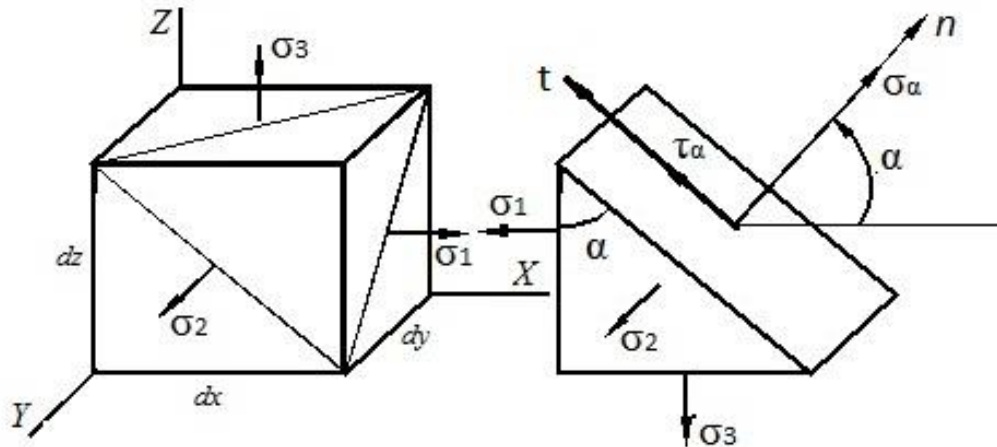


Рисунок 10.3 - Розподіл напружень

З паралелепіпеда вирізана тригранна призма з кутом α , поверхня, похилого перетину, перпендикулярна головному перетину напружень σ_2 (рис. 10.3). Розглянемо рівновагу тригранної призми.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 & \Rightarrow \sigma_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \cos \alpha + \tau_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \sin \alpha = \sigma_1 dz dy, \\ \sum F_z = 0 & \Rightarrow \sigma_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \sin \alpha + \tau_\alpha dy \frac{dz}{\cos \alpha} \cos \alpha = \sigma_3 dy dz \tan \alpha. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Після перетворень:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_3 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad (10.2)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha. \quad (10.3)$$

σ_{α} і τ_{α} – нормальні і дотичні напруження, що виникають на перетину, розташованому під кутом α (рис. 10.3).

Зведемо кожне з одержаних рівнянь в квадрат і складемо. В результаті одержимо рівняння кола – круг Мору:

$$\left(\sigma_{\alpha} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_{\alpha}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2. \quad (10.4)$$

Одержано рівняння кола, де центр кола лежить на осі σ і зміщений від центру на відстань $\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$. Одержана залежність дає можливість по куту нахилу перетину α визначати нормальні і дотичні напруження, що виникають на ньому.

10.4. Побудова круга Мору. Пряме і зворотне завдання круга Мору.

У координатах σ і τ круг Мору є параметричним рівнянням кола де як параметр виступає кут α .

Проаналізуємо значення нормальних і дотичних напружень на похилих перетинах залежно від кута α :

$$\begin{aligned} \alpha = 0 &\Rightarrow \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \quad \tau_{\alpha} = 0, \\ \alpha = 90 &\Rightarrow \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_3 \quad \tau_{\alpha} = 0, \\ \alpha = 45 &\Rightarrow \quad \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad \tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \end{aligned}$$

Можна відзначити максимальні значення напружень:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1, \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (10.5)$$

У теорії напруженого стану виділяють два основні завдання: пряме і зворотне завдання круга Мору.

Пряме завдання. У точці відомі положення головних перетинів і відповідні їм головні напруження; потрібно знайти нормальні і дотичні напруження на перетинах, нахилених під заданим кутом α до головних (Відомо: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \alpha$; визначити: $\sigma_{\alpha}, \tau_{\alpha}$).

Аналitiчне рішення прямої задачі дається формулами (10.2) – (10.3).

Проаналізуємо напружений стан, скориставшись графічною побудовою. Для цього введемо в розгляд геометричну площину і віднесемо її до прямокутних координатних осей σ, τ . Вибравши для напружень деякий масштаб, відкладаємо

по осі абсцис (рис. 10.4) відрізки $OA = \sigma_1$; $OB = \sigma_2$. На AB як на діаметрі будуюмо коло з центром в точці C . Побудований круг і буде кругом напружень Мору.

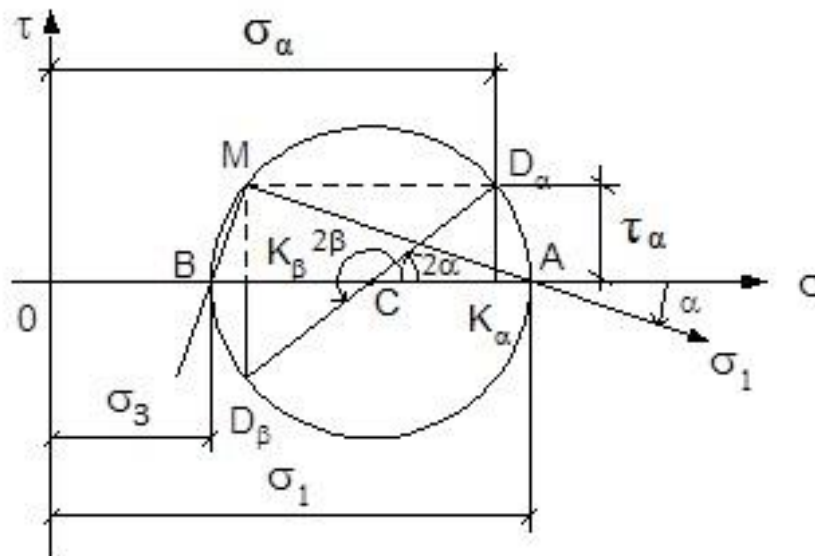


Рисунок 10.4 – Круг Мору

Координати точок круга відповідають нормальним і дотичним напруженням на різних перетинах. Так для визначення напружень на перетину, проведеному під кутом α , з центру круга C проведемо промінь під кутом 2α до перетину з колом в точці D_α ($\alpha > 0$). Абсциса одержаної точки D_α рівна нормальній напрузі σ_α , а ордината – дотичній напрузі τ_α .

$$OK_\alpha = \sigma_\alpha, \quad K_\alpha D_\alpha = \tau_\alpha.$$

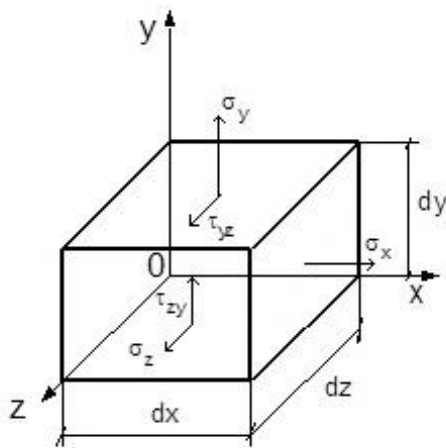


Рисунок 10.5.

Зворотнє завдання. У точці відомі нормальні і дотичні напруження, що діють в двох взаємно перпендикулярних перетинах, що проходять через дану точку; потрібно знайти головні напрями і головні напруження (Відомо: σ_z , σ_y , σ_x , $\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau$; визначити: σ_1 , σ_2 , σ_3) (рис. 10.5).

Одне із заданих нормальних напружень є головним (σ_x – рис. 10.5), оскільки на цьому перетину не діють дотичні напруження. Для визначення двох інших головних напружень спочатку визначаються положення крапок D_α і D_β (рис. 10.4), що характеризують напруження на відповідних гранях елемента. Для цього відкладаються у відповідному масштабі відрізки

$OK_\alpha = \sigma_y$, $OK_\beta = \sigma_z$, $K_\alpha D_\alpha = K_\beta D_\beta = \tau$. Далі на $D_\alpha D_\beta$ з центром в точці С будуємо коло – круг Мору. Точки перетину круга Мору з віссю σ визначатимуть два головні напруження $OA = \sigma'$; $OB = \sigma''$. Ранжуючи головні напруження σ_x , σ' , σ'' привласнюємо їм відповідні індекси.

Значення головних напружень можуть бути знайдені і аналітично:

$$\begin{aligned}\sigma' = OA = OC + R &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma'' = OB = OC - R &= \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}.\end{aligned}\quad (10.6)$$

Де $R = OD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + CD_\alpha^2}$.

10.5. Узагальнений закон Гука.

Цей закон встановлює зв'язок між величиною деформації і напруженнями для складно-напруженого стану.

Розглянемо деформацію елемента тіла, вибравши цей елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда із сторонами a , b , c . По гранях паралелепіпеда діють головні напруження σ_1 , σ_2 , σ_3 (рис. 10.6).

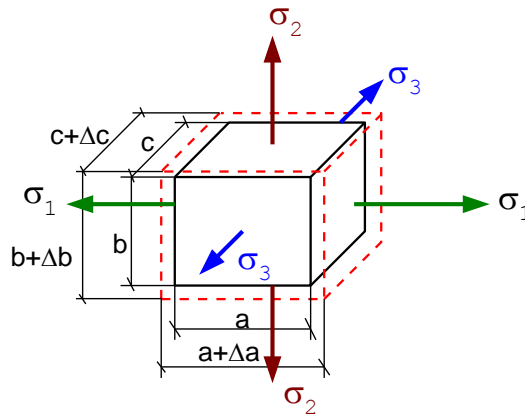


Рисунок 10.6. – Деформація призматичного елемента під дією головних напружень

При використанні принципу суперпозиції, можемо записати:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon'_1 + \varepsilon''_1 + \varepsilon'''_1, \quad (10.7)$$

де ε'_1 – відносне переміщення в напрямі σ_1 , викликане дією σ_1 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$); ε''_1 – відносне переміщення в напрямі σ_1 , викликане дією σ_2 ($\sigma_1 = \sigma_3 = 0$); ε'''_1 – відносне переміщення в напрямі σ_1 , викликане дією σ_3 ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$).

Припустимо відповідно до основних гіпотез і допущень, що властивості матеріалу відповідають закону Гука, а деформації малі, тоді з урахуванням того,

що напрям σ_1 для самого напруження σ_1 є подовжнім, а для напружень σ_2 и σ_3 – поперечним:

$$\varepsilon'_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon''_1 = -\mu \frac{\sigma_2}{E}, \quad \varepsilon'''_1 = -\mu \frac{\sigma_3}{E}. \quad (10.8)$$

На підставі виразів (10.8):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (10.9)$$

Аналогічно цьому одержимо вирази і для інших деформацій:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)], \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Формули (10.9-10.10) виражають узагальнений закон Гука для ізотропного тіла.

Визначимо повну деформацію для розглянутого випадку:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (10.11)$$

З останнього виразу можна визначити межі зміни коефіцієнта Пуассона. Якщо припустити, що всі напруження розтягують $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$, то логічно, що і повна деформація повинна бути більше нуля $\varepsilon \geq 0$, а це виконується, якщо $1 - 2\mu \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 0.5$, що підтверджується експериментально.

10.6. Теорії міцності.

Оцінка міцності є поширеним інженерним завданням, в якому напружений стан в небезпечній точці зіставляється з граничним станом. Така оцінка достатньо точна у разі одновісного напруженого стану (розтяг – стиск). Проте багато елементів конструкцій працюють в умовах складно-напруженого стану. Для цього складно-напружений стан замінюють простим напруженим станом – одновісний розтяг і перевіряється умова:

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma]_p. \quad (10.12)$$

Еквівалентним напруженням $\sigma_{екв}$ називається напруження, яке слід створити в розтягнутому зразку, щоб його напружений стан став рівнозначним заданому напруженому стану.

Для визначення еквівалентних напружень ученими запропонований ряд гіпотез (теорій) міцності, що дозволяють оцінити небезпеку переходу в граничний стан матеріалу елементів конструкцій, що знаходяться в складному напруженому стані.

У кожній теорії міцності використовується певна гіпотеза міцності, яка є припущеннями про переважний вплив на міцність матеріалу того або іншого чинника. Найбільш важливими чинниками, пов'язаними з виникненням небезпечного стану матеріалу є: нормальні і дотичні напруження, лінійні деформації і потенційна енергія деформації.

Гіпотеза міцності з безлічі чинників, що впливають на міцність матеріалу, вибирає один, ігноруючи всі інші. Надійність тієї або іншої гіпотези міцності перевіряється експериментальним шляхом.

1. Теорія максимальних нормальних напружень.

У основу теорії найбільших напружень покладена гіпотеза про переважний вплив найбільших по абсолютній величині нормальних напружень.

Згідно цієї теорії міцності небезпечний стан матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільше по модулю головне напруження досягає граничного значення для заданого матеріалу при простому розтягуванні. Умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 \leq [\sigma]_p, \quad (10.13)$$

де σ_1 – максимальне з головних напружень.

Ця теорія міцності дає позитивні результати лише для деяких крихких матеріалів.

2. Теорія максимальних лінійних деформацій.

У основі теорії лежить припущення, що матеріали незалежно від складності напруженого стану руйнуються тоді, коли відносно найбільше подовження в якому-небудь напрямі досягає величини, при якій відбувається руйнування при розтягуванні.

Згідно даної теорії міцності небезпечний стан матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільше по модулю відносна лінійна деформація досягає граничного значення при простому розтягуванні.

$$|\varepsilon_{\max}| \leq [\varepsilon]_p. \quad (10.14)$$

Виразив максимальні відносні деформації згідно узагальненому закону Гука, і проаналізувавши величину граничного значення відносної деформації при розтягуванні:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E_{об}} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \leq \frac{[\sigma]}{E_{л}}.$$

Тоді за умови рівності об'ємного $E_{об}$ і лінійного модуля пружності $E_{л}$ умова міцності матиме наступний вигляд:

$$\sigma_{еквII} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]_p. \quad (10.15)$$

Експериментальна перевірка даної гіпотези виявила ряд істотних недоліків. Кращі результати знаходять для крихких матеріалів (легований чавун, високоміцні сталі після низької відпустки і т.і.).

3. Теорія максимальних дотичних напружень.

Згідно даної теорії міцності небезпечний стан матеріалу при складному напруженому стані настає тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає значення, граничного для даного матеріалу.

$$\tau_{\max} \leq [\tau]_p. \quad (10.16)$$

При об'ємному напруженому стані

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \leq [\tau]_p = \frac{[\sigma]_p}{2}$$

Тоді умова міцності по третій теорії матиме вигляд:

$$\sigma_{еквIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (10.17)$$

Ця теорія дає хороший збіг з результатами дослідів для пластичних матеріалів.

4. Енергетична теорія міцності.

Заснована на припущенні, що небезпечний стан, незалежно від виду напруженого стану, настає тоді, коли питома потенційна енергія деформації, пов'язана із зміною форми, досягає граничного для даного матеріалу значення.

$$u_{\phi сл} \leq [u_{\phi}]_p. \quad (10.18)$$

При об'ємному напруженому стані умова міцності в цьому випадку прийме наступний вигляд:

$$\sigma_{еквIV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]_p. \quad (10.19)$$

Досліди добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів, що однаково працюють на розтяг і стиск. Поява в матеріалі малих пластичних деформацій четвертою теорією визначається точніше, ніж третьою.

5. *Гіпотеза теорія Мору.*

Гіпотеза міцності Мору дозволяє врахувати відмінність у властивостях матеріалу. Її можна одержати шляхом модифікації гіпотези найбільших дотичних напружень:

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} \sigma_3 \leq [\sigma]_p. \quad (10.20)$$

Якщо властивості матеріалу при розтягу і стиску однакові, то п'ята теорія перетвориться в третю теорію міцності.

На практиці перша і друга теорія не використовуються (носять історичний характер). Для пластичних матеріалів використовуються третя і четверта теорії міцності, для крихких – п'ята теорія міцності.

Контрольні запитання:

1. Напружений стан в точці.
2. Що таке головні перетини і головні напруження?
3. Види напружених станів.
4. Круг напружень Мору.
5. Пряме завдання круга Мору.
6. Зворотне завдання круга Мору.
7. Узагальнений закон Гука.
8. Теорії міцності.

Лекція 11. Складний опір. Розрахунки на міцність при дії циклічного навантаження.

- 11.1. *Просторовий згин.*
- 11.2. *Сумісна дія згину з крученням.*
- 11.3. *Поняття про втомну міцність матеріалу.*
- 11.4. *Основні характеристики циклів.*
- 11.5. *Криві втоми. Межа втомної міцності і її визначення.*
- 11.6. *Вплив параметрів циклу на втомну міцність матеріалів.*
- 11.7. *Вплив концентрації напружень, чистоти обробки поверхні і розмірів деталі на межу витривалості.*
- 11.8. *Практичні розрахунки на витривалість(визначення запасу втомної міцності).*

Багато елементів конструкцій окрім простих деформацій (розтяг, стиск, зсув, кручення і згин) випробовують складніші, які є поєднаннями простих деформацій. Наприклад:

- просторовий згин;
- косий згин;
- згин з розтягом або стиском;
- позацентровий розтяг або стиск;
- згин з крученням.

Такі випадки опору називаються складним опором.

При складній деформації в поперечних перетинах виникає не одне, а декілька зусиль. При розрахунках на складний опір зазвичай виходять з принципу незалежності дії сил. Він застосовується у всіх випадках, коли деформації малі і відповідають закону Гука. Розглянемо складні деформації, що найбільш часто зустрічаються.

11.1. Просторовий згин.

Просторовий згин викликається зовнішніми силами, розташованими в різних силових площинах, що проходять через вісь балки (рис. 11.1). Зігнута вісь балки в цьому випадку є просторовою кривою.

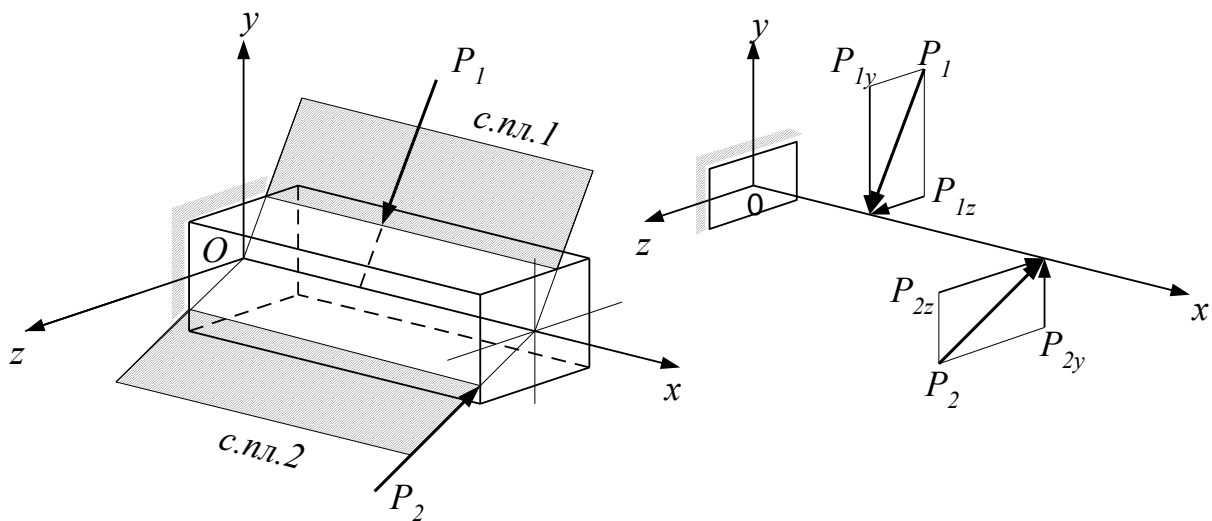


Рисунок 11.1 – Просторовий згин

Просторовий згин зручно приводити до згину в двох площинах. Для цього всі навантаження слід розкласти на складові, які знаходяться в головних площинах xu и xz , де осі y і z – головні осі інерції перетину. Вертикальні складові викликають згин у вертикальній площині, а горизонтальні – в горизонтальній. У поперечних перетинах виникають згинаючі моменти M_z та M_y і поперечні сили Q_z і Q_y . Звичайно дією поперечних сил нехтують і враховують тільки згинаючі моменти.

Напруження в будь-якій точці поперечного перетину визначаються як сума нормальних напружень, викликаних згином в різних площинах:

$$\sigma = \pm \frac{M_z \cdot y}{J_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (11.1)$$

Знаки напружень визначаються згинаючими моментами і координатами точок перетину. Напруження лінійно залежать від координат точок перетину y і z . Епюра напружень обмежена площиною, яка з площиною поперечного перетину перетинаються по прямій, напруження в якій рівні нулю. Ця пряма називається нейтральною лінією (рис. 11.2).

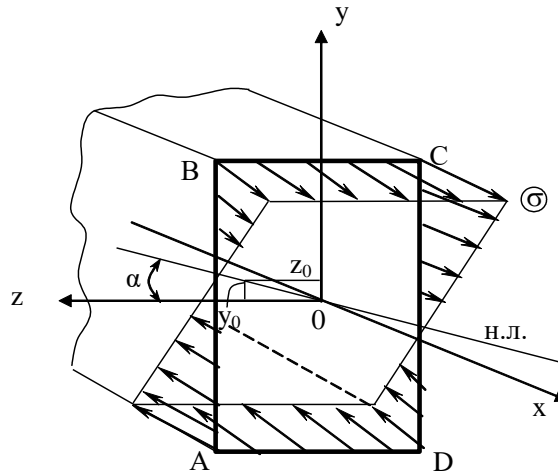


Рисунок 11.2 – Розподіл напружень

Умова міцності при просторовому згині має вигляд:

$$\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (11.2)$$

11.2. Сумісна дія згину з крученням.

Сумісна дія згину і кручення є найбільш характерним випадком навантаження валів (рис.11.3). Сили, що діють на вали (тиск на зуби шестерень, натягнення ременів, власна вага валу і шківів і т. п.), викликають його згин і кручення.

Від скручування валу виникають дотичні напруження, які по перетину розподіляються нерівномірно

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}}. \quad (11.3)$$

При згині валу в його перетинах виникають нормальні і дотичні Напруження. Дотичними напруженнями від згину нехтують, оскільки $\tau_{кр} \gg \tau_{изг}$. Нормальні напруження по перетину також розподіляються нерівномірно

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{xz}}{W_z}. \quad (11.4)$$

Очевидно, небезпечними точками є точки, розташовані у краю перетину, де дотичні і нормальні напруження досягають максимальних значень.

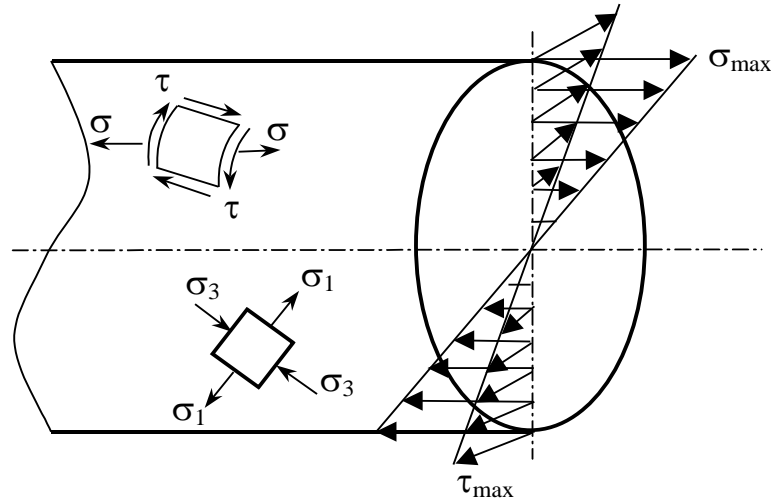


Рисунок 11.3 – Сумісна дія згину і кручення

Визначимо характер напруженого стану матеріалу валу. Для цього у краю перетину виділимо елемент і розглянемо напруження, що діють по його гранях. По чотирьох гранях елемента діють дотичні напруження, а до двох прикладені нормальні напруження. Таким чином, при згині з крученням матеріал валу знаходиться в плоскому напруженому стані.

Щоб записати умову міцності необхідно використовувати відомі теорії міцності. Для пластичних матеріалів застосовують третю і четверту теорії міцності. Заздалегідь визначають головні напруження (зворотне завдання круга Мору (10.6)).

Згідно до третьої теорії міцності умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\text{екв.III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.5)$$

Аналогічно одержують умову міцності і по четвертій теорії міцності:

$$\sigma_{\text{екв.IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.6)$$

Одержані умови міцності дозволяють виконувати всі види розрахунку на міцність: проектувальний і перевірочний, а також визначати допустні навантаження.

11.3. Поняття про втомну міцність матеріалу

Багато елементів машин і конструкцій в процесі експлуатації випробовують напруження, періодично змінні в часі. Наприклад, до таких умов роботи схильні деталі кривошипно-шатунного механізму двигуна внутрішнього згорання, вали трансмісій, лопатки турбін, рейки, осі вагонів і ін.

Розглянемо роботу осі вагонних коліс (рис. 11.4).

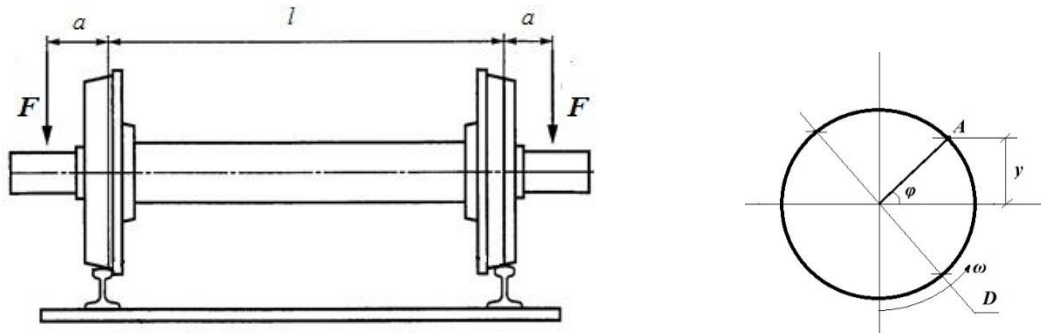


Рисунок 11.4 – Вісь вагонних коліс

Сила F діє з боку вагону на вісь коліс. На ділянці l вісь випробовує деформацію чистого згину і нормальні напруження на цій ділянці –

$$\sigma = \frac{My}{J_z}, \quad (11.7)$$

де y – відстань від нейтральної осі до даного волокна. Параметр y при обертанні осі змінюватиметься згідно наступного закону:

$$y = \frac{D}{2} \sin \varphi = \frac{D}{2} \sin \varpi t, \quad (11.8)$$

де ϖ – кутова швидкість.

Тоді

$$\sigma(t) = \frac{M}{J_z} \frac{D}{2} \sin \varpi t. \quad (11.9)$$

З одержаного виразу виходить, що нормальні напруження на ділянці осі змінюються по синусоїдальному закону і максимальне значення $\sigma_{\max}(t) = \frac{M}{J_z} \frac{D}{2}$.

Таким чином, не дивлячись на те, що зовнішня сила постійна, напруження, що виникають в осі, є змінними і змінюються вони по синусоїдальному закону.

Експериментально встановлено, що під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються через деяку кількість циклів, тоді як при постійному такому навантаженні елементи не руйнуються, таке явище називається втомною міцністю. Матеріал як би «втомлюється» від дії таких

напружень. Тому процес руйнування матеріалів при дії змінних напружень був названий втомою, а здатність чинити опір руйнуванню при їх дії – витривалістю. Втомна міцність не пов'язана із зміною механічних властивостей матеріалу в процесі деформації, а викликана утворенням мікротріщин, які розвиваються і зменшують фактичну площу поперечного перетину. За рахунок цього настає момент, коли фактичні напруження перевищуватимуть допустимі і відбудеться руйнування. Механізм утворення тріщин і руйнування матеріалів при циклічних навантаженнях вельми складний, і вивчений не до кінця. Тому питання втомною міцності матеріалів розв'язуються, в основному, експериментальними методами. Об'єднання і систематизація експериментальних даних – основний зміст теорії втомною міцності.

11.4. Основні характеристики циклів

Напруження в поперечних перетинах елементу конструкції можуть змінюватися в часі закономірно або хаотично. В більшості випадків, що зустрічаються на практиці, передбачається, що напруження є періодичними функціями часу $\sigma = f(t)$ з періодом рівним T . Сукупність всіх значень напружень за час одного періоду називається циклом напружень.

Для деталей машин характерна циклічна зміна напружень в часі, яка може бути задана в наступному вигляді:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_a \sin \omega t . \quad (11.10)$$

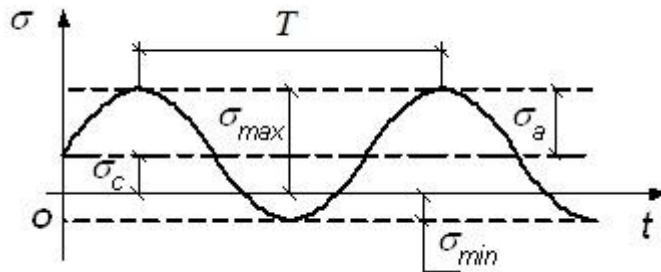


Рисунок 11.5 – Цикл навантаження

На втомну міцність в основному впливають максимальні σ_{\max} і мінімальні σ_{\min} напруження циклу (рис. 11.5). Крім того цикли навантаження характеризують наступні параметри:

- $\sigma_c = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$ – середнє (постійне) напруження циклу;
- $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ – амплітуда циклу;
- $2\sigma_a$ – розмах циклу;

$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ – важлива характеристика циклу (коефіцієнт асиметрії циклу), якщо

$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, то $r = -1$ – симетричний цикл, $\sigma_{\max} \neq -\sigma_{\min}$ – асиметричний цикл,

σ_{\max} і σ_{\min} одного знаку ($r > 0$) – знакопостійний цикл, σ_{\max} і σ_{\min} різних знаків ($r < 0$) – знакозмінний цикл, σ_{\max} або σ_{\min} рівні нулю – віднульовий цикл. Якщо $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma = const$, то $r = 1$ – постійне статичне навантаження. Цикли, у яких r однакові називаються подібними.

11.5. Криві втоми. Межа втомної міцності і її визначення

Як наголошувалося раніше, поява і розвиток втомних тріщин обумовлені дією змінних в часі напружень. З другого боку практика показує, що при правильному розрахунку деталі машин і елементи конструкцій можуть піддаватися циклічним напруженням необмежено довго не руйнуючись.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якому великому числі повторень змінних навантажень, називається межею витривалості (межею втоми).

Основною проблемою розрахунків на витривалість є визначення умов, при яких з'являються і розвиваються втомні тріщини. Вона розв'язується експериментально шляхом проведення спеціальних випробувань. В результаті випробувань визначають число циклів N , які витримує зразок до руйнування. За одержаними даними будують графік залежності $\sigma_{\max} = f(N)$, який називається кривою втоми або кривою Веллера (рис. 11.6).

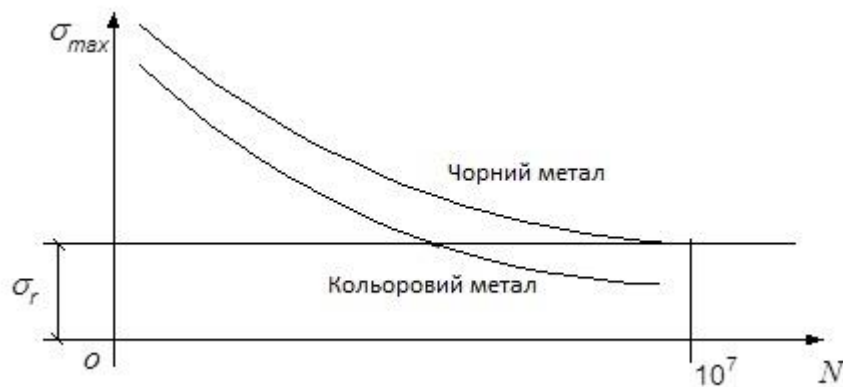
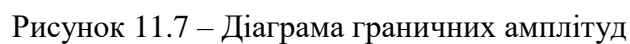


Рисунок 11.6 – Криві втоми

Із зменшенням σ_{\max} число циклів N до руйнування зразка швидко зростає і крива асимптотично наближається до деякої прямої – асимптоти. Асимптота відсікає на осі ординат напруження, при якому матеріал не руйнується при будь-якому числі циклів. Це напруження називається межею витривалості або межею втомної міцності і позначається σ_r . Індекс r – коефіцієнт асиметрії циклу. Досліди показують, що для більшості чорних металів крива витривалості і її асимптота практично зливаються при $N = 10^7$, це число циклів називається базою. Виходячи з цього, вважають, що якщо зразок не руйнувався до 10^7 циклів, то він не руйнуватиметься і при триваліших випробуваннях. Крива витривалості для кольорових металів із зростанням N спадає поступово, і не має асимптоти ні при якому числі циклів. Це означає, що для таких матеріалів не існує дійсної межі витривалості. Тому в цьому випадку за базу випробувань приймають

Слід зазначити, що межа втомної міцності не є характеристикою тільки властивостей матеріалу як, наприклад, модуль пружності або коефіцієнт Пуассона. Вона залежить від багатьох чинників: умов проведення експерименту, температури, параметрів циклів, концентрації напружень, форми і розмірів зразків, стану поверхні і т. д., а величина максимального напруження не визначає повністю процес втомного руйнування.

Основний вплив на втомну міцність матеріалу надає коефіцієнт асиметрії



По цій діаграмі можна визначити стан деталі, що працює при заданих напруженнях циклу σ_a й σ_c . Для цього на діаграму треба нанести точку $N(\sigma_a, \sigma_c)$. Якщо положення точки N виявиться нижчим кривої AB (точка N''), то матеріал працюватиме необмежено довго, не руйнуючись. Якщо точка N лежатиме вище за криву AB (точка N'), то матеріал руйнуватиметься після декількох циклів змін напружень. Отже, сама оцінка втомної міцності виконується просто. Проте побудова діаграми пов'язана з виконанням трудомістких і тривалих випробувань. Тому для спрощення на практиці часто криву AB , замінюють прямою (рис. 4, б). Рівняння цієї прямої у відрізках по координатних осях має вигляд:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_c}{\sigma_g} = 1. \quad (11.11)$$

В результаті відсікається деяка область діаграми, що йде в запас міцності. Область, зайнята трикутником OAB – область безпечних циклів з погляду втомної міцності. Але при $\sigma_{\max} > \sigma_T$ деталь може вийти з ладу із-за появи великих пластичних деформацій. Тому з діаграми слід виключити зону пластичності, тобто обмежити діаграму циклами, для яких $\sigma_{\max} \leq \sigma_T$. Для цього з точки E проведемо пряму EC під кутом 45° . Рівняння цієї прямої має вигляд:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_T} + \frac{\sigma_c}{\sigma_T} = 1. \quad (11.12)$$

Таким чином, область $OADE$ (рис. 11.7, б) є зоною безпечних циклів по втомі і текучості. Одержана діаграма називається схематизованою діаграмою втомної міцності матеріалу.

11.7. Вплив концентрації напружень, чистоти обробки поверхні і розмірів деталі на межу витривалості

Найбільш важливим чинником, що знижує межу витривалості, є концентрація напружень, викликана різкою зміною форми і (або) розмірів деталі (галтельні переходи, пази, свердлення).

Такі концентратори напружень характеризуються теоретичним коефіцієнтом концентрації напружень $K_{\sigma T}$. У розрахунках використовують фактичний коефіцієнт концентрації напружень, який враховує чутливість матеріалу до концентраторів напружень:

$$K_\sigma = 1 + q_\sigma (K_{\sigma T} - 1), \quad (11.13)$$

де q_σ – коефіцієнт чутливості, його значення для різних матеріалів приводиться в довідниках.

Чим міцніший матеріал, тим більше його чутливість до концентрації напружень. Якщо $q_\sigma = 0$, то $K_\sigma = 1$ – матеріал не чутливий до концентрації напружень. Якщо $q_\sigma = 1$, то $K_\sigma = K_{\sigma T}$ – матеріал повністю чутливий до концентрації напружень.

З поліпшенням чистоти обробки поверхні втомна міцність матеріалу підвищується, оскільки зменшується кількість точок концентрації напружень на поверхні деталі. У розрахунках якості поверхні враховується коефіцієнтом якості поверхні:

$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1n}}, \quad (11.14)$$

де σ_{-1} – межа витривалості стандартного полірованого зразка; $\sigma_{-1п}$ – межа витривалості стандартного зразка із заданою чистотою обробки поверхні.

У деяких навчальних посібниках вплив чистоти обробки поверхні на втомну міцність враховується коефіцієнтом $\varepsilon_{п\sigma} = 1/\beta_{п\sigma}$.

Зменшити вплив стану поверхні на втомну міцність можна відповідними технологічними прийомами обробки, що приводять до зміцнення поверхневих шарів (наклеп, обкаткою роликком, обдуванням дробом, азотуванням, цементацією, поверхневим гарту і т. і.).

Із збільшенням абсолютних розмірів деталей втомна міцність деталей знижується, оскільки в деталях великих розмірів є більше внутрішніх дефектів і інших точок зародження втомних тріщин. Це враховується в розрахунках спеціальним коефіцієнтом $\beta_{m\sigma}$ – масштабний чинник:

$$\beta_{m\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1m}}. \quad (11.15)$$

Тут σ_{-1} – межа витривалості стандартного зразка ($d = 7 \div 10$ мм); σ_{-1m} – межа витривалості зразка геометрично подібного, заданих розмірів.

Іноді як масштабний чинник використовується коефіцієнт $\varepsilon_{m\sigma} = 1/\beta_{m\sigma}$.

Наявність всіх основних чинників, що знижують втомну міцність, враховується в розрахунках загальним коефіцієнтом зниження втомної міцності:

$$K_{\sigma\partial} = K_{\sigma} \cdot \beta_{п\sigma} \cdot \beta_{m\sigma} = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{п\sigma} \cdot \varepsilon_{m\sigma}}. \quad (11.16)$$

11.8. Практичні розрахунки на витривалість (визначення запасу втомної міцності)

Всі розрахунки на витривалість виконуються як перевіірочні в наступному порядку:

- Визначають геометричні розміри деталей без урахування циклічної дії навантаження, але за заниженими допустимими напруженнями.
- Визначають коефіцієнт зниження втомної міцності матеріалу $K_{\sigma\partial}$ (K_{σ} , $\beta_{п\sigma}$, $\beta_{m\sigma}$), використовуючи для цього графіки і таблиці.
- Визначають фактичний коефіцієнт запасу втомної міцності n . Якщо $n \geq [n]$, то втомна міцність забезпечена ($[n]$ – допустний коефіцієнт). Він залежить від умов роботи деталі, її призначення, матеріалу, наявності концентраторів і т.д. Зазвичай $[n] = 1,4 \div 3,0$.

Методика визначення фактичного коефіцієнта запасу втомної міцності залежить від виду напруженого стану деталі і параметрів циклу.

При лінійному напруженому стані і симетричному циклі, якщо відомі: σ_{-1} – межа витривалості матеріалу і $K_{\sigma\partial}$ – загальний коефіцієнт зниження втомної

міцності, то $\sigma_{-1\partial} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\partial}}$ – межа витривалості деталі, а фактичний коефіцієнт запасу втомної міцності визначають таким чином:

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1\partial}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma\partial} \cdot \sigma_{\max}}. \quad (11.17)$$

При лінійному напруженому стані і асиметричному циклі скористаємося схематизованою діаграмою втомної міцності, побудованої по трьох характеристиках матеріалу: σ_{-1} , σ_T , σ_{ϵ} (рис. 11.8).

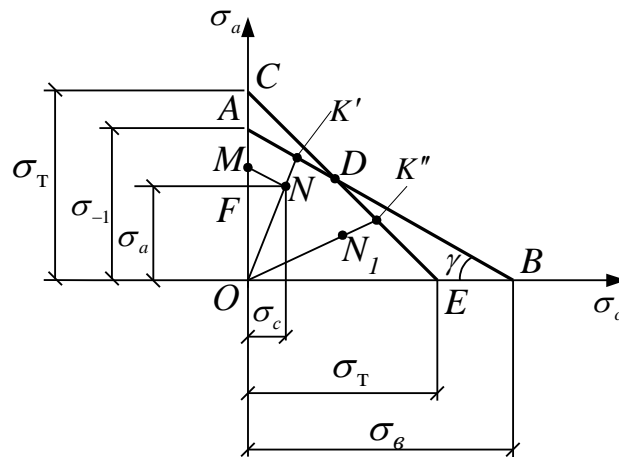


Рисунок 11.8 – Визначення запасу втомної міцності

Визначимо коефіцієнт n для деталі, яка працює при напруженнях σ_a , σ_c якщо $K_{\sigma} = \beta_{\text{п}\sigma} = \beta_{\text{м}\sigma} = 1$. Нанесемо на діаграму точку $N(\sigma_a, \sigma_c)$ (рис. 11.8). При пропорційному збільшенні напружень σ_a , σ_c відрізок ON може перетнути пряму AD , в цьому випадку руйнування відбудеться від втоми матеріалу. Якщо ж відрізок ON_1 перетне пряму DE , то руйнування деталі відбудеться від великих пластичних деформацій.

Розглянемо перший випадок, коли ON перетинає пряму AD у деякій точці $K'(\sigma'_a, \sigma'_c)$. Тоді коефіцієнт запасу втомної міцності визначають наступним чином

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma'_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma'_c + \sigma'_a}{\sigma_c + \sigma_a} = \frac{OK'}{ON}.$$

Проведемо пряму NF паралельно OB і NM паралельно AB (рис. 11.8). $\triangle ONM$ подібний $\triangle OK'A$, тоді $\frac{OK'}{ON} = \frac{OA}{OM}$, але $OA = \sigma_{-1}$, а

$$OM = OF + FM = \sigma_a + \sigma_c \cdot \operatorname{tg} \gamma. \quad \text{Позначимо} \quad \varphi_\sigma = \operatorname{tg} \gamma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_c}, \quad \text{тоді}$$

$$n_\sigma = \frac{OK'}{ON} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a + \varphi_\sigma \sigma_c}.$$

Досліди показують, що наявність чинників, що знижують втомну міцність, робить вплив тільки на граничні амплітуди циклу і не впливає на σ_c . Тому коефіцієнт запасу втомної міцності при лінійному напруженому стані і асиметричному циклі запишеться у вигляді:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma 0} \sigma_a + \phi_\sigma \sigma_c}. \quad (11.18)$$

Розглянемо другий випадок, коли пряма ON_1 перетинає пряму DE у точці $K''(\sigma''_a, \sigma''_c)$ (рис. 11.8). В цьому випадку коефіцієнт запасу за умовами текучості має вигляд:

$$n_{\sigma T} = \frac{\sigma''_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma''_c + \sigma''_a}{\sigma_c + \sigma_a} = \frac{\sigma_T}{\sigma_a + \sigma_c}. \quad (11.19)$$

При виконанні практичних розрахунків на витривалість, наперед невідомо яку пряму перетне відрізок ON у граничному стані. Тому визначають коефіцієнт запасу як по втомі – n_σ , так і по текучості – $n_{\sigma T}$. За розрахунковий приймають коефіцієнт, що має менше значення, тобто необхідно, щоб $n_\sigma \geq [n]$ и $n_{\sigma T} \geq [n]$.

Аналогічно визначаються фактичні коефіцієнти запасу втомної міцності при інших видах деформацій. Наприклад, при крученні коефіцієнт запасу втомної міцності визначається по формулах:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau 0} \tau_{\max}} \quad \text{— при лінійному напруженому стані і симетричному циклі.}$$

При лінійному напруженому стані і асиметричному циклі:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau 0} \tau_a + \phi_\tau \tau_c} \quad \text{— по втомі;}$$

$$n_{\tau T} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_c} \quad \text{— по текучості.}$$

У разі коли одночасно змінюються і нормальні і дотичні Напруження повний запас втомної міцності визначають таким чином:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (11.20)$$

Контрольні запитання

1. Складний опір.
2. Просторовий згин.
3. Умова міцності при просторовому згині.
4. Згин з крученням.
5. Умова міцності по третій теорії міцності.
6. Поняття втомної міцності.
7. Характеристики циклів вантаження.
8. Криві втоми. Межа витривалості.
9. Діаграма граничних амплітуд.
10. Вплив концентрації напружень на межу витривалості.
11. Практичні розрахунки на витривалість.

Список літератури

1. Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993. — 655 с.
2. Степин П.А. Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 304 с.

ЗМІСТ

Лекція 5 Основи розрахунків на міцність. Внутрішні сили і зусилля, напруження, переміщення і деформації.....	3
5.1. Завдання, мета і предмет науки опір матеріалів.....	3
5.2. Розрахункова схема. Типові форми елементів інженерних споруд	4
5.3. Класифікація сил, що вивчаються в опорі матеріалів	5
5.4. Основні гіпотези і принципи опору матеріалів	6
5.5. Метод перетинів. Внутрішні силові чинники.....	6
5.6. Напруження. Переміщення і деформації.....	8
Контрольні запитання.....	10
Лекція 6. Розтяг-стиск	10
6.1. Розтяг-стиск. Внутрішні сили і напруження	11
6.2. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона	12
6.3. Приклад побудови епюр подовжніх сил, напружень і переміщень	13
6.4. Деформація при сумісній дії силового і температурного впливу	15
6.5. Напруження, які виникають на перерізах, розташованих під кутом, при деформаціях розтягу	15
6.6. Запас міцності. Допустні напруження. Умова міцності і жорсткості при деформаціях розтягу-стиску	17
Контрольні запитання.....	19
Лекція 7. Геометричні характеристики плоских перетинів	19
7.1. Статичний момент перетину. Центр тяжіння	20
7.2. Зміна статичного моменту перетину при паралельному перенесенні осей	21
7.3. Визначення центра тяжіння складної фігури	22
7.4. Моменти інерції плоских перетинів	23
7.5. Зміна моментів інерції перетину при паралельному перенесенні осей	24
7.6. Головні осі. Головні моменти інерції	25
7.7. Головні моменти інерції простих фігур	26
7.8. Головні моменти інерції складних фігур з віссю симетрії	27
7.9. Поняття про радіус інерції і момент опору	29
Контрольні запитання.....	29
Лекція 8. Деформація згин	30
8.1. Поняття про згин	30
8.2. Внутрішні силові чинники в поперечних перетинах балки при згині	31
8.3. Диференціальні залежності при згині	36
8.4. Напруження, що виникають при чистому згині	37
8.5. Умова міцності при деформації чистий згин.....	41
8.6. Напруження, що виникають при поперечному згині.. ..	43
Контрольні запитання.....	44
Лекція 9. Чистий зсув. Кручення.....	44
9.1. Поняття про чистий зсув. Деформації при чистому зсуві	44
9.2. Напруження, що виникають на довільному перерізу розташованому під кутом при деформації чистий зсув	46
9.3. Закон Гука при чистому зсуві	47
9.4. Практичні розрахунки з'єднань, що працюють на зсув	47
9.5. Кручення бруса круглого поперечного перетину	49
9.6. Умова міцності при крученні	52
Контрольні запитання.....	52
Лекція 10. Основи теорії складно-напруженого стану	53
10.1. Напружений стан у точці	53
10.2. Головні перетини і головні напруження	54
10.3. Круг напружень Морю	55

10.4. Побудова круга Мору. Пряме і зворотне завдання круга Мору	56
10.5. Узагальнений закон Гука	58
10.6. Теорії міцності	59
Контрольні запитання.....	62
Лекція 11. Складний опір. Розрахунки на міцність при дії циклічного навантаження ..	62
11.1. Просторовий згин	63
11.2. Сумісна дія згину з крученням	64
11.3. Поняття про втомну міцність матеріалу	66
11.4. Основні характеристики циклів	67
11.5. Криві втоми. Межа втомної міцності і її визначення	68
11.6. Вплив параметрів циклу на втомну міцність матеріалів	69
11.7. Вплив концентрації напружень, чистоти обробки поверхні і розмірів деталі на межу витривалості	70
11.8. Практичні розрахунки на витривалість (визначення запасу втомної міцності)	71
Контрольні запитання.....	74
Список літератури	75